



Uniwersytet Morski w Gdyni
Wydział Nawigacyjny



**Zastosowanie metod teorii odwzorowań kartograficznych
przy opracowaniu wyników pomiarów wykonanych
w technologii skaningu laserowego.**

Rozprawa doktorska

Autor: mgr inż. Paweł S. Dąbrowski
Promotor: prof. dr hab. inż. Cezary Specht
Promotor pomocniczy: dr inż. Marek H. Zienkiewicz

Gdynia, 2019



Gdynia Maritime University
Faculty of Navigation



**Application of methods of cartographic projections theory
for the processing of results of laser scanning technology
measurements.**

Doctoral dissertation

Author: M.Sc., Eng. Paweł S. Dąbrowski
Supervisor: Prof., Eng. Cezary Specht
Auxiliary supervisor: Ph.D., Eng. Marek H. Zienkiewicz

Gdynia, 2019

**Rozprawę dedykuję ukochanej Małżonce Edycie,
bez której poświęcenia i wsparcia niniejsza praca
z pewnością by nie powstała.**

Podziękowania:

Promotorowi prof. dr. hab. inż. Cezaremu Spechtowi
– za wsparcie merytoryczne, okazane zaufanie oraz stworzenie
możliwości rozwoju naukowego.

Promotorowi pomocniczemu dr. inż. Markowi Zienkiewiczowi
– za okazane wsparcie merytoryczne, życzliwość i przyjazną
atmosferę pracy.

Dziekanowi dr. hab. Leszkowi Smolarkowi, prof. UMG,
dyrektorowi kmdr. dr. hab. inż. Mariuszowi Wążowi, prof. AMW,
dr. inż. Antoniemu Rzonca, wicedyrektorowi Andrzejowi
Włodarskiemu, ks. prałatowi Ireneuszowi Bradtke
– za umożliwienie przeprowadzenia pomiaru i pozyskanie
materiału do badań.

Spis treści

Streszczenie	6
Abstract	7
1 Wstęp	8
2 Skaniny laserowy jako metoda pozyskiwania danych geo-przestrzennych	12
2.1 Ogólna zasada działania skanerów laserowych.....	13
2.2 Dokładność skanerów laserowych	14
2.3 Chmura punktów jako produkt skanowania laserowego.....	15
2.4 Procedura pomiaru terenowego oraz rejestracji i georeferencji chmur punktów	17
3 Odwzorowania kartograficzne	21
3.1 Zarys teorii odwzorowań kartograficznych	22
3.2 Klasyfikacja odwzorowań kartograficznych.....	26
3.3 Przykłady aplikacyjne wybranych odwzorowań kartograficznych	27
3.3.1 Odwzorowanie azymutalne równopolowe Lamberta	27
3.3.2 Odwzorowanie walcowe równopolowe Lamberta	29
3.3.3 Odwzorowanie walcowe poprzeczne równokątne Lamberta	31
3.3.4 Odwzorowanie walcowe normalne równokątne Mercatora	33
3.3.5 Odwzorowanie pseudowalcowe równopolowe Sansona	35
3.3.6 Odwzorowanie walcowe poprzeczne równoodległościowe Cassiniego-Soldnera.....	36
3.4 Zastosowanie klasycznych odwzorowań kartograficznych w przestrzennych rozwinięciach chmur punktów	38
4 Metody przetwarzania chmury punktów	41
4.1 Obecne rozwiązania	41
4.2 Pierwotne powierzchnie geometryczne obiektów symetrycznych.....	43
4.3 Przestrzenne rozwinięcia chmur punktów walcowych obiektów symetrycznych	47
4.3.1 Oś konstrukcyjna walcowych obiektów symetrycznych	47
4.3.2 Pionizacja chmur punktów pochyłych walcowych obiektów symetrycznych	54
4.3.3 Funkcje odwzorowawcze przestrzennego rozwinięcia chmur punktów walcowych obiektów symetrycznych.....	57
4.3.4 Pochyłość osi konstrukcyjnej a poprawność geometryczna przestrzennego rozwinięcia chmury punktów walcowych obiektów symetrycznych.....	59
4.4 Przestrzenne rozwinięcia chmur punktów sferycznych i elipsoidalnych obiektów symetrycznych.....	63
4.4.1 Parametry geometryczne definiujące sferyczne i elipsoidalne obiekty symetryczne... 63	
4.4.2 Układy współrzędnych krzywoliniowych sferycznych i elipsoidalnych obiektów symetrycznych.....	65

4.4.3	Funkcje odwzorowawcze przestrzennego rozwinięcia chmur punktów sferycznych obiektów symetrycznych.....	68
4.4.4	Funkcje odwzorowawcze przestrzennego rozwinięcia chmur punktów elipsoidalnych wydłużonych obiektów symetrycznych.....	72
5	Algorytmy metody najmniejszych kwadratów w przestrzennych rozwinięciach chmur punktów	77
5.1	Wpasowanie okręgu w zbiór punktów z zastosowaniem metod M-estymacji.....	77
5.1.1	Podstawy teoretyczne metod M-estymacji.....	78
5.1.2	Test numeryczny.....	82
5.2	Wpasowanie prostej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej z zastosowaniem totalnej metody najmniejszych kwadratów	86
5.2.1	Wpasowania prostej w zbiór punktów trójwymiarowych	86
5.2.2	Testy numeryczne.....	90
6	Aplikacje praktyczne metody kartograficznego zobrazowania chmury punktów.....	93
6.1	Rozwinięcie na pobocznicy walca – wieża telefonii GSM	93
6.2	Rozwinięcie na pobocznicy walca – kolejowa wieża ciśnień.....	99
6.3	Rozwinięcie na powierzchni sfery – planetaria UMG i AMW	107
6.4	Rozwinięcie na powierzchni elipsoidy wydłużonej – sklepienie budynku sakralnego	115
7	Podsumowanie	119
8	Wykaz rysunków i tabel.....	121
9	Bibliografia.....	126

Streszczenie

Przedmiotem rozprawy są przestrzenne rozwinięcia chmur punktów obiektów symetrycznych. Przedstawienie geometrii obiektów w postaci chmur punktów następuje w wyniku przeprowadzenia pomiaru w technologii skaningu laserowego oraz odpowiedniego przetworzenia zapisanych obserwacji. Powstały zbiór danych przestrzennych stanowi szczegółową i dokładną numeryczną reprezentację pomierzonych powierzchni obiektu. W skład chmur wchodzi często miliony punktów, co powoduje występowanie trudności interpretacyjnych podczas ich wizualizacji. W szczególności dotyczy to cechujących się regularnością kształtu obiektów symetrycznych. W trójwymiarowej przestrzeni chmury punktów występują wtedy na jednym kierunku pomierzone punkty przedstawiające odrębne części obiektu. Celem pracy było stworzenie alternatywnej postaci chmury punktów, która zachowuje dotychczasową szczegółowość, pozwala na czytelniejszą jej prezentację i ułatwia wnioskowanie odnośnie geometrii obiektu symetrycznego.

Przeprowadzenie przestrzennego rozwinięcia chmury punktów wymaga określenia regularnej matematycznej powierzchni podstawowej, aproksymującej kształt obiektu symetrycznego. Powierzchnią tą może być np. walec, sfera, elipsoida obrotowa lub hiperboloida. Stanowi ona powierzchnię odniesienia dla pomierzonych punktów w chmurze. Drugim niezbędnym elementem koniecznym do przeprowadzenia rozwinięcia jest zdefiniowanie elementu symetrii powierzchni podstawowej (punktu lub linii). Do wyznaczenia wartości parametrów geometrycznych określających zarówno powierzchnie, jak i elementy symetrii wykorzystano m.in. nieodporne i odporne metody estymacji. W oparciu o uzyskane parametry przeprowadzana jest parametryzacja wszystkich punktów z chmury, polegająca na przypisaniu im odpowiednich współrzędnych krzywoliniowych związanych z powierzchnią podstawową. Dodatkowo, wyznaczone są liniowe wartości separacji punktów od powierzchni pierwotnej (tzw. parametr głębokości przestrzennego rozwinięcia). W efekcie uzyskiwany jest nowy sposób prezentacji chmury punktów obiektu symetrycznego, opierający się na współrzędnych krzywoliniowych oraz parametrze głębokości.

W rozprawie wykorzystano teorię powierzchni oraz teorię kartografii matematycznej. Na ich podstawie stworzono zależności funkcyjne adaptujące i modyfikujące znane formuły odwzorowań kartograficznych. Funkcje te przekształcają pierwotną chmurę punktów do postaci przestrzennego rozwinięcia. Oba zbiory danych mają charakter trójwymiarowy, co stanowi istotną różnicę względem klasycznych zobrazowań mapowych. W przestrzennych rozwinięciach chmur punktów obiektów symetrycznych, obrazem ich elementów symetrii jest powierzchnia. W efekcie, wszystkie punkty z rozwiniętej chmury znajdują się ponad wspomnianą płaszczyznę na wysokości odpowiadającej odległości punktów od elementu symetrii. Eliminowane są w ten sposób w znacznej mierze trudności interpretacyjne, gdyż punkty znajdujące się w pierwotnej chmurze punktów na tym samym kierunku, w przestrzennym rozwinięciu odwzorowują się w różnych miejscach. W rozprawie przedstawiono ponadto zniekształcenia pojawiające się na skutek stosowania przestrzennych rozwinięć chmur punktów.

Możliwości aplikacyjne rozwiązania przetestowano na chmurach punktów pochodzących z pomiaru czterech obiektów symetrycznych. Zróżnicowane cechy geometryczne obiektów umożliwiły przedstawienie wybranych aspektów przestrzennych rozwinięć. Rozpatrywanymi powierzchniami podstawowymi były walec, sfera oraz elipsoida obrotowa wydłużona. Sporządzone na bazie rozwinięć opracowania obejmują m.in. analizy konfiguracji przestrzennej złożonych konstrukcji wielomodułowych, analizy porównawcze obiektów o podobnej geometrii, analizy kształtu oraz odkształceń obiektów symetrycznych.

Abstract

The object of the dissertation are the spatial expansions of symmetrical object's point clouds. Presentation of the objects geometry in the form of point clouds is a result of the measurement in laser scanning technology and the processing of recorded observations. The resulting spatial data set is a detailed and accurate numerical representation of the object measured surfaces. Clouds often include millions of points, which causes the occurrence of interpretation difficulties during their visualization. In a special way, this applies to the regular shape of symmetrical objects. In the three-dimensional space of the point cloud in one direction there are points showing separate parts of the object are visible. The aim of the work was to create an alternative form of the point cloud, which maintains the current detail, allows for its more legible presentation and facilitates inference about the geometry of the symmetrical object.

Conducting a point cloud spatial expansion requires determining a regular mathematical primary surface, which approximates the shape of a symmetrical object. This surface may be e.g. a cylinder, sphere, spheroid or hyperboloid. The surface is the reference for measured points in the cloud. The second element necessary to carry out the development is to define the element of symmetry of the primary surface (point or line). To determine the value of geometric parameters defining both surfaces and elements of symmetry, non-robust and robust methods of estimation. Based on the obtained values, parameterization of all points from the cloud is performed, consisting in assigning them the appropriate curvilinear coordinates related to the primary surface. In addition, linear values of separation of points from the surface (depth parameter of the spatial expansion) are determined. As a result, a new way of presenting a symmetrical object point cloud is obtained, based on curvilinear coordinates and the depth parameter.

The dissertation used the theory of surfaces and the theory of cartography. Based on them, functional relationships have been created that adapt and modify known formulas of cartographic projections. These functions transform the primary point cloud into the form of spatial expansions. Both data sets are three-dimensional, which is a significant difference from the classic maps. In the spatial expansion of symmetrical object points clouds, the image of their symmetry elements is the surface. As a result, all points from the created cloud are above the mentioned plane at the height corresponding to the distance of points from the element of symmetry. Thus, interpretation difficulties are largely eliminated, because the points located in the primary point cloud in the same direction, in spatial expansions, are projected in different places. The dissertation also presents distortions that appear due to the use of spatial expansions of point clouds.

Application possibilities of the solution were tested on point clouds obtained from the measurement of four symmetrical objects. Diversified geometrical features of objects enabled presentation of different aspects of spatial expansions. The primary surfaces considered were the cylinder, sphere and prolate spheroid. Obtained datasets based on expansions include spatial configuration analysis of complex multi-module constructions, comparative analysis of objects with similar geometry, shape and deformations analyses of symmetrical objects.

1 Wstęp

Nowoczesne techniki pomiarowe zapewniają pozyskiwanie coraz większych ilości danych w coraz krótszym czasie. Wraz ze wzrostem wskaźników wydajności i efektywności następuje poprawienie się parametrów dokładnościowych wyznaczanych wielkości. Stanowiący jedną z najszybciej rozwijających się narzędzi pozyskiwania danych przestrzennych jest naziemny skaningu laserowy (TLS - ang. Terrestrial Laser Scanning), który dzięki pełnej automatyzacji [Vosselman i Maas, 2010] oraz elektrooptycznej metodzie pomiaru odległości [Heritage i Large, 2009] eliminuje konieczność bezpośredniego dostępu do mierzonego obiektu i w dużym stopniu minimalizuje możliwość wystąpienia błędów przypadkowych po stronie operatora urządzenia [Riveiro i in., 2013]. Wykonane dla każdego pomierzonego punktu obserwacje geodezyjne w postaci kątów: poziomego i pionowego oraz odległości służą do wyznaczenia współrzędnych ortokartezjańskich w lokalnym trójwymiarowym układzie współrzędnych [Soudarissanane, 2016]. Zbiór pomierzonych na danym stanowisku punktów, określany terminem chmury punktów, stanowi dyskretną reprezentację numeryczną otoczenia skanera laserowego [Reshetyuk, 2009], która z pomocą odpowiednich bibliotek [Rusu i Cousins, 2011] może być wyświetlana w przestrzeni modelu oprogramowania. Postępująca miniaturyzacja modułów oraz sukcesywne udoskonalanie ich parametrów diametralnie zmieniają możliwości wykorzystania rozmaitych urządzeń elektronicznych [Misra i Enge, 2006]. Stąd również w dziedzinie naziemnego skaningu laserowego można zaobserwować minimalizację i zwiększającą się kompaktowość kolejnych generacji skanerów [Lachat i in., 2017a].

Prezentacja i opracowanie wyników pomiarów przeprowadzonych w technologii naziemnego skaningu laserowego, z racji powszechnego występowania wielomilionowych chmur punktów, wymaga stosowania stacji roboczych o dużej mocy obliczeniowej [Stein, 2018]. Mnogość tworzonych opracowań pochodnych świadczy o przydatności metody m.in. w badaniach nad strukturą i stabilnością obiektów budowlanych [Pesci i in., 2013], rekonstrukcji [Scopigno i in., 2011], [Lubowiecka i in., 2011] analizach geomorfologicznych [Du i Teng, 2007], [Abellán i in., 2009], [Barbarella i in., 2013], [Schwalbe i in., 2008] czy precyzyjnym leśnictwie [Wezyk i in., 2007], [Ratajczak i Węzyk, 2015], [Skowronski i in., 2014]. Dyskretny charakter chmur punktów stanowi szerokie pole badań do wykrywania w nich obiektów o określonej geometrii [Serna i in., 2014], [Zhu i Hyypya, 2014] oraz tworzeniu na ich podstawie modeli trójwymiarowych [Levoy i in., 2000], [Specht i in., 2016], [Tang i in., 2010]. Spektrum zastosowań naziemnego skaningu laserowego jest również poszerzone o analizy parametrów odbicia wiązki lasera i wnioskowania o ich cechach fizykochemicznych [Junttila i in., 2017]. Jednak we wszystkich wymienionych aspektach ważną rolę odgrywa prawidłowa interpretacja treści chmury punktów jako zobrazowania stanu rzeczywistego środowiska [Vosselman i Maas, 2010]. W zastosowaniach bazujących na manualnym lub półautomatycznym opracowaniu danych szczególne miejsce zajmuje kwestia wzajemnego przysłaniania się punktów w chmurze [Dabrowski i Specht, 2019]. Punkty znajdujące się na tych samych kierunkach w rzucie ortogonalnym lub perspektywicznym utrudniają, a często wręcz uniemożliwiają jednoznaczny identyfikację poszczególnych elementów strukturalnych obiektów [Barnard, 1983]. Pomimo możliwości ustawiania widoku chmury punktów z różnych kątów i pozycji, często pozyskanie z niej szczegółowych danych geometrycznych wymaga dodatkowych działań, takich jak np. stosowanie ograniczeń wyświetlanego fragmentu przestrzeni [Abbas i in., 2013], [Dewez i in., 2016], w efekcie czego prezentowane są jedynie istotne punkty z pominięciem pozostałych znajdujących się na tym samym kierunku.

W świetle istniejących ograniczeń i niedogodności autor postawił sobie pytanie o możliwość poprawy warunków prowadzenia analiz przestrzennych i wnioskowania w trójwymiarowej przestrzeni chmur punktów. W efekcie została opracowana metoda wykonywania tzw. przestrzennych rozwinięć

chmur punktów [Dabrowski i Specht, 2019], która ma na celu stworzenie alternatywnej formy prezentacji złożonej struktury chmury punktów. Numerycznemu opracowywaniu chmur punktów, w świetle dotychczasowych publikacji oraz zastosowań aplikacyjnych, podlegają jedynie nieprzetworzone dane pomiarowe. Poza rejestracją, będącą klasyczną transformacją 7-parametrową [Gruen i Akca, 2005], [Ji i in., 2015], nie podlegają one zmianie struktury wewnętrznej. Transformacja polega na wykonaniu sekwencji odpowiednich obrotów elementarnych wobec osi układu współrzędnych, translacji o wektor oraz uwzględnieniu współczynnika zmiany skali [Vosselman i Maas, 2010], [Heritage i Large, 2009]. Zarejestrowana chmura punktów podlega zatem procesowi dalszego narastania jej stopnia złożoności, co nie wpływa korzystnie na jej przejrzystość i czytelność. Stąd celem pracy było stworzenie metody przekształcenia pierwotnej chmury punktów do postaci przestrzennych rozwinięć z dominującym w wymiarze geometrycznym parametrem szerokości. W niniejszej pracy skupiono się na obiektach posiadających cechy symetrii, których powierzchnie można poddać odwzorowaniu na inną powierzchnię [Biernacki, 1949]. Wykorzystując cechę regularności obiektów można utworzyć harmonijny i logiczny zbiór przestrzenny, który nie traciłby dotychczasowych danych przestrzennych i dzięki swojej innowacyjnej formie otworzyłby nowe możliwości wnioskowania i analizowania chmur punktów.

Kształt symetrycznych obiektów budowlanych, infrastrukturalnych i innych odpowiada konkretnej bryle geometrycznej. Przykładowo, chłodnie kominowe przyjmują kształt hiperboloid [Ledwoń i Golczyk, 1967], a sklepienia wypukłe kształt sfer [Aita i in., 2017]. Stosując odpowiednie metody estymacji kształtu podstawowego pomierzonych obiektów na podstawie ich punktowej reprezentacji [Andrews i Séquin, 2014], [Li i Griffiths, 2004], możliwe jest wyznaczenie powierzchni referencyjnej, do której można odnieść geometrycznie chmurę punktów. Zważywszy, że wszystkie wyznaczone w ten sposób powierzchnie podstawowe posiadają swoje krzywoliniowe linie parametryczne [Arfken i in., 2013], [Korn i Korn, 2017], można wyznaczyć ortokartezjańskie współrzędne punktów w chmurze za pomocą ich krzywoliniowych odpowiedników. Należy wziąć pod uwagę, że znaczna większość punktów z chmury nie należy do idealnej matematycznie powierzchni, estymowanej z reprezentatywnego zbioru punktów. Stąd też kolejnym zagadnieniem jest określenie sposobu wyrażania wzajemnej topologii punkt – powierzchnia. Zadanie to może być zrealizowane poprzez określenie odległości danego punktu od powierzchni pierwotnej oraz rozróżnienie, po której stronie powierzchni znajduje się punkt.

Po przeprowadzeniu parametryzacji chmury punktów w układzie współrzędnych krzywoliniowych powierzchni podstawowej, możliwe jest wykonanie przekształcenia zmieniającego formę przestrzenną pierwotnej chmury punktów. W kartografii matematycznej, zajmującej się metodami obrazowania elipsoidalnej lub sferycznej aproksymacji globu ziemskiego na płaszczyznę, wykształciły się liczne sposoby przedstawienia wybranych fragmentów planety m.in. na cele nawigacyjne czy gospodarcze [Gajderowicz, 2009], [Grafared i Krumm, 2006], [Grafared i in., 2014], [Lapaine i Usery, 2017], [Sawicki, 1960]. Ścisłe matematyczny aspekt teorii odwzorowań kartograficznych [Biernacki, 1973], [Różycki, 1978] może w przypadku przestrzennych rozwinięć chmur punktów posłużyć jako narzędzie do stworzenia nowych trójwymiarowych metod obrazowania. Istotnym punktem rozważań kartografii są zniekształcenia odwzorowawcze, których obecności nie można wyeliminować, a można jedynie dobrać odpowiednie odwzorowania do oczekiwanych celów, np. poprzez zachowanie warunku równopolewości bądź równokątności map [Urbański i Czapczyk, 1992], [Galon, 1951].

Formuły przestrzennego rozwinięcia chmury punktów, podobnie jak w kartografii, zachowują zasadę unikalności, tj. jednoznacznego przypisania punktowi na powierzchni oryginału punktu na powierzchni obrazu [Gajderowicz, 2009]. Tym samym tworzony jest nowy zbiór przestrzenny

określony funkcjami odwzorowawczymi, które tym się różnią od klasycznych funkcji kartograficznych, że wprowadzają w obrazie trzeci wymiar wertykalny. Współrzędna ta związana jest z topologią: powierzchnia podstawowa – punkt, i w niniejszej rozprawie określana jest terminem parametru głębokości. Przeniesienie płaskiego odwzorowania mapowego w trzeci wymiar stwarza nowe możliwości prezentowania obrazu całej pierwotnej chmury punktów jednocześnie. Należy w tym miejscu zaznaczyć, że powstający zbiór przestrzenny jest również chmurą punktów. Tym samym jest on także obarczony wspomnianymi wcześniej uwarunkowaniami (np. wzajemnym przesłanianiem się punktów), choć stopień tych niedogodności jest niewspółmiernie mniejszy. Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów obiektu symetrycznego pozwala na tworzenie w trójwymiarowej przestrzeni rzutów ortogonalnych i perspektywicznych, które ukazują cechy geometryczne pomierzonego obiektu w sposób nowatorski i niedostępny bezpośrednio w oryginalnym zbiorze danych. Stworzone narzędzie umożliwia w czytelny i przejrzysty sposób ukazania całej złożoności obiektu symetrycznego w ramach jednego opracowania. Korzystnym rozwiązaniem jest stosowanie kilku rzutów, które w wyczerpujący sposób ukazują szereg parametrów geometrycznych [Dabrowski i Specht, 2019].

Obiekty symetryczne posiadające jedną lub więcej osi symetrii niekiedy posiadają elementy konstrukcji, które odbiegają od zakładanego regularnego kształtu geometrycznego. Spostrzeżenie to otwiera nowe zagadnienie numerycznego przekształcenia struktury chmury punktów w oparciu o właściwości geometryczne bryły obiektu. Niezbędnym w takim przypadku jest właściwe określenie pierwotnej powierzchni oraz zdefiniowanie zależności funkcyjnej, na drodze której następowaty przekształcenie jej w drugą. W związku z powyższym, zasadnym było podjęcie tematu pracy: **„Zastosowanie metod teorii odwzorowań kartograficznych przy opracowaniu wyników pomiarów wykonanych w technologii skaningu laserowego”**.

Celem niniejszej pracy jest opracowanie metody wykorzystania wybranych odwzorowań kartograficznych w procesie przetwarzania chmur punktów pochodzących ze skanowania obiektów symetrycznych, która umożliwi wzrost jej czytelności. Aby zrealizować cel główny pracy należało rozważyć następujące cele cząstkowe:

1. Opisanie technologii pomiarowej naziemnego skaningu laserowego oraz procesu powstania chmury punktów,
2. Omówienie stosowanych w kartografii odwzorowań oraz określenie sposobu ich wykorzystania w przetwarzaniu chmur punktów,
3. Przedstawienie sposobów przetwarzania chmur punktów oraz procesu opracowywania modeli trójwymiarowych,
4. Przedstawienie funkcji odwzorowawczych realizujących przestrzenne rozwinięcia chmur punktów obiektów symetrycznych,
5. Omówienie możliwości wykorzystania metod geodezyjnego rachunku wyrównawczego w przestrzennych rozwinięciach chmur punktów obiektów symetrycznych,
6. Wykorzystanie opracowanych odwzorowań na wybranych przykładach oraz przedstawienie konkretnych zastosowań aplikacyjnych.

Dla realizacji wymienionych celów praca została podzielona na pięć kolejnych rozdziałów:

Rozdział 2. „Skaning laserowy jako metoda pozyskiwania danych geo-przestrzennych” – przedstawiony tu zostanie stan nauki i techniki w dziedzinie naziemnego skaningu laserowego oraz aktualne sposoby przetwarzania wyników pomiarów. Ponadto omówione zostaną stosowane technologie, błędy pomiarowe, zasada działania oraz produkt skanowania laserowego – chmura punktów.

Rozdział 3. „Odwzorowania kartograficzne” – zawiera przegląd literatury w zakresie odwzorowań kartograficznych w kontekście omawianych rozwiązań. Zostaną one scharakteryzowane pod względem stosowanych powierzchni oryginałów oraz ich podstaw analitycznych. Rezultatem analizy będą wnioski dotyczące kryteriów wyboru poszczególnych odwzorowań pod względem ich zasadności i funkcjonalności.

Rozdział 4. „Metody przetwarzania chmury punktów” – rozpatrywane tu będą obecne sposoby aplikacyjnego wykorzystania skaningu laserowego oraz główna teza pracy, odwzorowanie kartograficzne chmury punktów. Szczegółowej analizie zostanie poddany proces realizacji przestrzennego rozwinięcia chmury punktów w aspekcie określania powierzchni pierwotnych oraz elementów symetrii obiektów symetrycznych.

Rozdział 5. „Algorytmy metody najmniejszych kwadratów w przestrzennych rozwinięciach chmur punktów” – rozpatrywane tu będą sposoby wyznaczenia wybranych parametrów geometrycznych mających znaczenie z punktu widzenia przestrzennych rozwinięć. Szczególny nacisk zostanie położony na wyrównanie odporne, które umożliwia uzyskanie lepszych wyników niż klasyczne podejście nieodporne.

Rozdział 6. „Aplikacje praktyczne metody kartograficznego zobrazowania chmury punktów” – zawiera wybrane przykłady zastosowania opracowanej technologii oraz wynikowe zobrazowania.

Zaproponowane rozwiązania uzupełniają lukę pomiędzy trójwymiarową prezentacją dużej ilości danych, a sporządzaniem metodami klasycznymi analiz struktury przestrzennej obiektów oraz ich deformacjami. Dzięki możliwości alternatywnej postaci chmury punktów obrazujących powyższe dane w formie przestrzennego rozwinięcia wzbogaconego parametrem głębokości względem powierzchni odniesienia, możliwe jest efektywniejsze wnioskowanie o geometrii obiektu.

2 Skaniny laserowy jako metoda pozyskiwania danych geo-przestrzennych

Spośród wielu dostępnych metod przedstawiania i numerycznego opisywania przestrzeni, w ostatnim dwudziestolecu jedno z istotniejszych miejsc zajmuje skaniny laserowy [Lemmens, 2011]. O jego pozycji decyduje możliwość pozyskiwania dużej ilości danych pomiarowych w krótkim okresie czasu. Wskutek rozwoju dziedziny powstały kolejne generacje skanerów, których wydajność pomiaru zwiększyła się z kilku tysięcy w roku 1997 [Staiger, 2011] do miliona pomierzonych punktów na sekundę w 2016 r. [Lachat i in., 2017a]. Zasadniczym kryterium podziału naziemnych skanerów laserowych (TLS) są sposób emisji wiązki lasera (skanery fazowe i impulsowe) oraz zakres przestrzenny pomiaru (FoV - ang. Field of View). Drugie kryterium urządzenia realizujące, które nie mają możliwości automatycznego obrotu instrumentu i przeprowadzają pomiar wycinka przestrzeni w postaci okna (skanery stacjonarne), urządzenia z możliwością pomiaru otoczenia z niewielkim ograniczeniem kąta pionowego (skanery hybrydowe) i urządzenia obejmujące pomiarem pełną panoramę (skanery panoramiczne) [Petrie i Toth, 2009]. Z racji sposobu umieszczania skanerów na statywach, pomiar przestrzeni pod nim jest ograniczone. W dwóch ostatnich przypadkach (skanery hybrydowe i panoramiczne), w pozyskanej chmurze punktów bezpośrednio pod miejscem wskazującym położenie instrumentu w czasie pomiaru w przestrzeni stożka o kącie rozwarcia charakterystycznym dla danego modelu nie występują punkty. W literaturze opisane zostały przypadki, gdzie dzięki umieszczeniu skanera na odpowiednim stabilnym ramieniu w pozycji odwrotnej do klasycznej, tzn. spodarką do góry, wspomniany stożek jest odwrócony podstawą do góry [Pritchard i in. 2017]. Umożliwiło to pomiar powierzchni obiektów niedostępnych z perspektywy urządzenia znajdującego się na statywie na poziomie terenu.

Równolegle z rozwojem aparatury pomiarowej wzrastał stopień zaawansowania oprogramowania obsługującego chmury punktów, poprzez stosowanie odpowiednich algorytmów filtracji i wykrywania geometrii w chmurze [Hu i Zhao, 2013]. Stopniowe wdrażanie zintegrowanych bądź dołączanych do skanerów aparatów fotograficznych doprowadziło do możliwości rejestracji barw otoczenia i przypisanie pomierzonym punktom w chmurze odpowiednich wartości z palety kolorów RGB [Vosselman i Maas, 2010]. To udoskonalenie konstrukcji otworzyło nowe horyzonty dla technologii i spowodowało, że stała się ona konkurencją dla fotogrametrii krótkiego zasięgu [Baltsavias, 1999]. Skaniny laserowy przyczynił się do znacznego rozwoju niektórych dziedzin, takich jak np. inżynieria odwrotna, gdzie dysponowanie gęstym i wysokodokładnym zobrazowaniem powierzchni obiektu wydatnie wpływa na jakość tworzonych modeli trójwymiarowych [Schnabel i in., 2007]. Należy podkreślić, iż technologia skaniny laserowego nie posiada zstandaryzowanej procedury kontroli dokładności oraz oszacowania błędów pomiaru [Lichti i in., 2005]. W ostatnich latach podjęto próby uszczegółowienia tej tematyki i przedstawienia propozycji jednolitych wytycznych [Soudarissanane, 2016], [Soudarissanane i in., 2011].

Od 2011 r. technologia skaniny laserowego została zaliczona w jednym z aktów wykonawczych do ustawy [Ustawa, 1989] jako jedna z dopuszczalnych metod wykonywania pomiarów geodezyjnych na terenie Rzeczypospolitej Polskiej. Przytoczona w rozporządzeniu definicja opisuje skaniny laserowy jako metodę obrazowania powierzchni terenu za pomocą skanera zainstalowanego w sposób stacjonarny na statywie (TLS), na samochodzie (MLS – ang. Mobile Laser Scanning), bądź na pokładzie statku powietrznego (ALS – ang. Airborne Laser Scanning). Warto podkreślić, iż ustawodawca zawęził zakres stosowania metody do grupy geodezyjnych terenowych pomiarów wysokościowych [Rozporządzenie, 2011a]. W grupie tej, poza przytoczoną metodą pomiarową, przewidziane są jeszcze metody biegunowa, ortogonalna, wcięć oraz precyzyjnego pozycjonowania przy pomocy GNSS (ang. Global Navigation Satellite System). Wykorzystanie skaniny laserowego do pozyskania zarówno

współrzędnych sytuacyjnych (horyzontalnych), jak i wysokościowych zostało dopuszczone w pomiarach fotogrametrycznych, które związane są ze skanowaniem lotniczym (ALS).

2.1 Ogólna zasada działania skanerów laserowych

Skanery laserowe są urządzeniami pomiarowymi stanowiącymi w pewnym sensie rozwiniętą wersję tachimetrów elektronicznych stosowanych powszechnie w wykonawstwie geodezyjnym. Tachimetry elektroniczne umożliwiają pomiar kierunków horyzontalnych i wertykalnych oraz elektromagnetyczny pomiar odległości (ang. EDM - Electromagnetic Distance Measuring [Heritage i Large, 2009]). Z różnic dwóch kierunków uzyskiwane są wartości kątów wyznaczających orientację przestrzenną mierzonego obiektu względem instrumentu [Wanic, 2007]. Z kolei wyznaczenie odległości realizowane jest poprzez pomiaru czasu jaki przebywa fala elektromagnetyczna po emisji do mierzonego obiektu oraz z powrotem [Łyszkowicz, 2006]. Nowoczesne tachimetry wykonują często kilka pomiarów jednej odległości i jako ostateczny odczyt podają wartość uśrednioną. Dysponując wartościami kątów pionowego i poziomego oraz odległością do celu możliwe jest wyznaczenie współrzędnych ortokartezjańskiego punktu w układzie współrzędnych instrumentu [Kosiński, 2012]. Warto podkreślić, że stosowane w urządzeniach pomiarowych emiterzy wiązki lasera nie są jednakowe i dzielą się na cztery klasy opierające się na bezpieczeństwo ich używania. Im wyższa klasa lasera, tym silniejsza jest jego wiązka, co przy bezpośrednim kontakcie wzrokowym może wiązać się ryzykiem uszkodzenia oczu [Arastounia, 2015].

Na rynku sprzętu geodezyjnego od pewnego czasu obecne się tzw. tachimetry skanujące, które pełnią podobną rolę jak skanery laserowe, z tą istotną różnicą, iż pomiar (skanowanie laserowe) realizowany jest znacznie wolniej i mniej wydajnie niż w przypadku skanerów [Scherer i Lerma, 2009]. Procedura pojedynczego pomiaru tachimetrycznego została w tachimetrach skanujących zautomatyzowana i realizowana jest sekwencyjnie w określonych interwałach kątów poziomego i pionowego. Zaletą tachimetrów elektronicznych jest szeroki zakres trybów pomiaru zapewniony przez odpowiednie procedury i algorytmy umożliwiające m.in. klasyczny pomiar sytuacyjno-wysokościowy, przeniesienie wysokości czy tyczenie [Jagielski, 2014]. Skanery laserowe, jako urządzenia dedykowane masowemu pozyskaniu numerycznych danych przestrzennych odzwierciedlających położenie trwałych elementów otoczenia nie posiadają takiej możliwości, przez co porównywanie ich z tachimetrami nie zawsze jest zasadne. Warto odnotować, że na rynku od niedawna funkcjonuje urządzenie nowej generacji, posiadające w większy stopniu rozwiązania zarówno skanera laserowego, jak i tachimetru [Lachat i in., 2017a], [Lachat i in., 2017b]. Dowodzi to zapotrzebowania geodetów zarówno na szybkie pozyskanie dużej ilości danych, jak również na możliwość wykorzystania klasycznych metod pomiarowych w geodezji gospodarczej i inżynierskiej.

Wyznaczanie odległości w naziemnym skanowaniu laserowym (TLS) realizowane jest metodą fazową bądź impulsową. W pierwszym przypadku wykorzystywana jest znana z fizyki prędkość propagacji fali świetlnej w próżni. Stąd też popularną anglojęzyczną nazwą metody jest ToF (Time of Flight). Biorąc pod uwagę, że wiązka lasera dwukrotnie pokonuje drogę pomiędzy skanerem a celem, do wyznaczenia odległości stosuje się następującą formułę [Soudarissanane, 2016]:

$$\rho = c \frac{\Delta t}{2}, \quad (2.1)$$

gdzie c oznacza prędkość światła wynoszącą 299 792 458 m/s, a Δt różnicę czasu pomiędzy momentem odbioru odbitej wiązki a momentem jej emisji. Niektórzy autorzy we wzorze uwzględniają również współczynnik refrakcji n zależny od warunków atmosferycznych (temperatury, ciśnienia i wilgotności)

[Vosselman i Maas, 2010]. Metoda fazowa polega na generowaniu w urządzeniu sygnału o stałej amplitudzie i pomiarze odległości na podstawie różnicy fazy fali w czasie jej emisji i odbioru. Odległość określana jest za pomocą wzoru [Soudarissanane, 2016]:

$$R = \frac{\Delta\varphi}{4\pi} \lambda, \quad (2.2)$$

gdzie $\Delta\varphi$ oznacza różnicę fazy, a λ długość fali.

Producenci aparatury pomiarowej wprowadzają na rynek skanery wykorzystujące oba rozwiązania choć coraz częściej z racji większego zasięgu pomiaru są to modele wykorzystujące metodę impulsową [Fröhlich i Mettenleiter, 2004]. Przyjmuje się, że skanery impulsowe pozwalają na rejestrację punktów położonych w większej odległości niż skanery fazowe. Literatura przedmiotu podaje przybliżone rzędy wielkości charakteryzujące obie grupy urządzeń. Skanerom impulsowym przypisuje się zasięg 800 m i częstotliwość pomiaru mniejszą niż 50 000 punktów na sekundę (TLS) i 200 000 punktów na sekundę (ALS). Z kolei skanery fazowe charakteryzują się zasięgiem mniejszym niż 100 m przy częstotliwości pomiaru nawet 1 000 000 punktów na sekundę [Vosselman i Maas, 2010]. Wybrane parametry techniczne stosowanych obecnie instrumentów przedstawiono w **Tab. 2.1**.

Tab. 2.1. Parametry wybranych skanerów laserowych obecnych na rynku w 2019 roku.

Producent	Model	Typ emisji	Maksymalny zasięg	Dokładność punktu (*)	Częstotliwość pomiaru [punktów/s]
Reigl	VZ-400i	Impulsowy	900 m	5 mm	500 000
Zoller + Fröhlich	IMAGER® 5016	-	365 m	-	1 094 000
Trimble	TX8	Impulsowy	340 m	2 mm	1 000 000
Leica	ScanStation P50	Impulsowy	> 1000 m	1.2 mm, 3 mm	1 000 000
Topcon	GLS-2000L	Impulsowy	500 m	3.5 mm	120 000

* Specyfikacja techniczna skanerów nie precyzuje dokładności według uniwersalnego kryterium.

2.2 Dokładność skanerów laserowych

Kwestia dokładności instrumentów realizujących pomiar metodą skanowania laserowego nie jest uniwersalna. Brak jednolitego i przyjętego przez wszystkich producentów aparatury pomiarowej standardu definiowania dokładności skutkuje niejednoznacznymi i trudno porównywalnymi wartościami parametrów. Problem dotyczy głównie dokładności pomiaru odległości, gdyż w przypadku kątów poziomych i pionowych metody określania dokładności ich wyznaczania są od lat znane i stosowane (np. w tachimetrach elektronicznych). Przy określaniu odległości stosowane są różne poziomy ufnosci (często pojedyncze odchylenie standardowe 1σ odpowiadające prawdopodobieństwu 68.3 %) oraz różne odległości odniesienia (np. dokładność wyznaczania odległości do punktu znajdującego się na prostopadłych powierzchniach oddalonych o 10 m, 25 m lub 50 m). Aby podkreślić złożoność zagadnienia należy dodać, że w opisach pojawiają się zróżnicowane parametry odbicia lasera od używanych powierzchni. W celu ujednoczenia tematyki dokładności skanerów laserowych, w niektórych ośrodkach badawczych zostały skonstruowane specjalne poligony badawcze dedykowane procedurze testowania skanerów laserowych [Mechelke i in., 2007], [Boehler i in., 2003]. W skład zbudowanej infrastruktury technicznej wchodziły obiekty o określonych kształtach

i wycięciach, służące do późniejszej oceny szumu w pomierzonej chmurze punktów. Dodatkowo, obiektem badań były właściwości odbijające powierzchni o zmiennych kolorach [Clark i Robson, 2004] oraz różnych właściwościach chemicznych [Godin i in., 2001].

Na dokładność pomiaru wpływają zarówno błędy przypadkowe, jak i błędy systematyczne [Baran, 1999]. Drugie z wymienionych mają charakter regularny i powtarzalny, stały dla każdego wykonanego pomiaru. Stosując się do odpowiednich reguł, stosunkowo łatwo określić ich wpływ i wyeliminować je na drodze wprowadzenia poprawek systematycznych [Wanic, 2007]. Dzięki temu skalibrowane urządzenie będzie wykonywało pomiar obarczony jedynie nieprzewidywalnymi co do natury i wielkości błędami przypadkowymi. Procedura kalibracji skanerów laserowych została opisana w licznych publikacjach, np. [Reshetyuk, 2009], [Salo i in., 2008], [Lichti i in., 2011], [Kaasalainen i in., 2009]. Precyzja wyznaczenia współrzędnych punktów w chmurze określana jest przez parametry powtarzalności i reprodukowalności [Soudarissanane, 2016]. Pierwszy czynnik wskazuje na uzyskiwanie tych samych współrzędnych w tych samych warunkach lokalizacyjnych i czasowych. Z kolei drugi informuje o zgodności współrzędnych punktów tego samego obiektu pomierzonego z różnych stanowisk. Zagadnienie to było szeroko opisywane przez wielu badaczy dziedziny skaningu laserowego [Santala i Joala, 2003], [Lichti i Licht, 2006], [Bae i Lichti, 2007], [Kaasalainen i in., 2007].

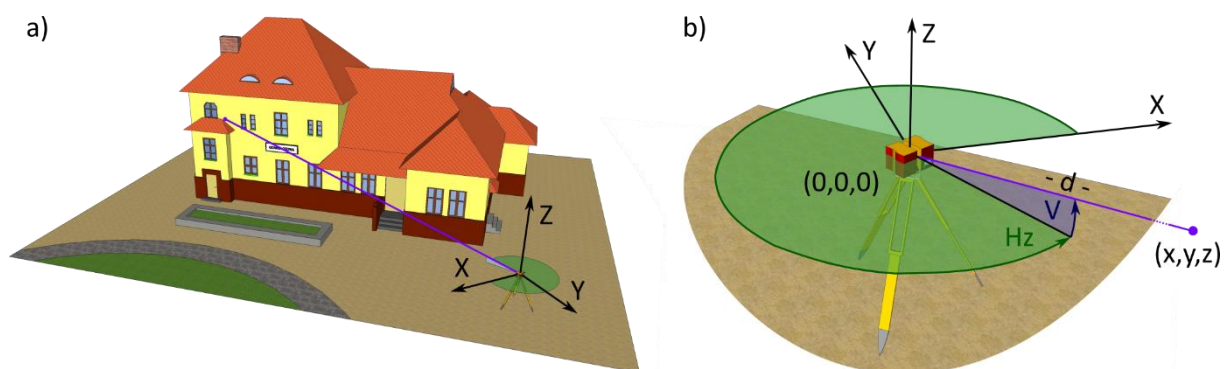
W innym ujęciu problemu podział źródeł błędów jest następujący: błędy instrumentalne, błędy środowiskowe, błędy związane z mierzonym obiektem oraz błędy związane z konfiguracją geometryczną: skaner – obiekt [Proakis i Salehi, 2002], [Soudarissanane, 2016]. Błędy instrumentalne wynikają z jakości i precyzji wykonania komponentów mechanicznych wchodzących w skład urządzenia. Niedoskonałości geometryczne i materiałowe mogą wpływać na rozbieżność wiązki lasera [Alda, 2003] na skutek niedoskonałej struktury powierzchni lutra odbijającego wiązkę lasera [Rees i Pellika, 2001], bądź z błędów inklinacji i kolimacji głównych osi instrumentu pomiarowego [Wanic, 2007]. Czynniki środowiskowe polegają na fizycznych uwarunkowaniach przebiegu fali elektromagnetycznej w ośrodku jakim jest powietrze. Nierzadkim przypadkiem jest obecność w atmosferze drobnych opadów bądź zapylenia, które dodatkowo zaburzają tor ruchu wiązki [Borah i Voelz, 2007]. Kolejną grupę stanowią błędy związane z takimi właściwościami powierzchni mierzonego obiektu jak gładkość, właściwości refleksyjne [Tabaka i Fryc, 2015] czy też kąt padania wiązki lasera [Soudarissanane, 2016]. Ostatnim z rozpatrywanych błędów są te wynikające z konfiguracji przestrzennej aparatury pomiarowej i mierzonego obiektu [Pfeifer i Briese, 2007].

Biorąc pod uwagę dużą liczbę czynników mogących przyczynić się do powstania błędów wyznaczania współrzędnych punktów w chmurze oraz rozmaitych warunków terenowych i środowiskowych w jakich przeprowadzany może być pomiar, rezerwa z jaką producenci podają dokładności oferowanego sprzętu wydaje się uzasadniona. Z drugiej strony posiadanie jednolitych wytycznych definiujących parametry i przydatność poszczególnych skanerów byłoby przydatne z punktu widzenia użytkowników. Podjęte próby zestandaryzowania procedury wyznaczania parametrów dokładnościowych w przyszłości być może doprowadzą do osiągnięcia konsensusu, który uwzględniłby i zadowalał interesy obu grup.

2.3 Chmura punktów jako produkt skanowania laserowego

Wynikiem skanowania laserowego jest bardzo liczny zbiór punktów stanowiący dyskretną (punktową) reprezentację powierzchni obiektów znajdujących się w zasięgu pomiaru skanera. Wyrażenie „powierzchnia obiektu” wskazuje na istotną właściwość technologii skanowania laserowego. Pomiarom objęte są bowiem jedynie te punkty, które nie dzieli od naziemnego skanera laserowego żadna przeszkoda, tzn. możliwe jest przebycie przez wiązkę lasera drogi od instrumentu

do celu i z powrotem. Niektóre lotnicze skanery laserowe (ALS) posiadają możliwość wykrycia wielokrotnego odbicia jednej wiązki [Heritage i Large, 2009], niemniej w rozwiązaniach naziemnych technologia ta nie znalazła jeszcze praktycznej implementacji. Na podstawie pomierzonej odległości oraz odczytanych wartości kątów z kół pionowego i poziomego [Wanic, 2007], dla każdego punktu z chmury obliczane są współrzędne w lokalnym układzie współrzędnych instrumentu (Rys. 2.1 a). Ustawienie instrumentu na statywie geodezyjnym wskazuje orientację koła poziomego, która to orientacja definiuje kierunek początkowy odkładania kątów poziomych w płaszczyźnie horyzontalnej. Kierunek początkowy jest tym samym jedną z osi trójwymiarowego układu współrzędnych z centrum emisyjno-odbiorczym skanera w punkcie początkowym układu (Rys. 2.1 b). W oparciu o kierunek początkowy kąta poziomego i początek układu współrzędnych definiowany jest kierunek, na którym w odległości d od instrumentu znajduje się mierzony punkt. W skład owego wskazania wchodzi zarówno kąt poziomy H_z , jak i kąt pionowy V (Rys. 2.1 b).



Rys. 2.1. Współrzędne punktu z chmury w lokalnym układzie współrzędnych skanera.

Rysunek przedstawia przebieg pomiaru pojedynczego punktu położonego na frontowej elewacji budynku za pomocą skanera panoramicznego. Skaner utrzymuje orientację osi lokalnego układu współrzędnych zależnie od sposobu (kierunku) umieszczenia go na statywie. Następnie, realizując pomiar w płaszczyznach wertykalnych, zmieniających się o zadany niewielki interwał kąta poziomego, wysyła wiązki lasera i na podstawie obserwacji kątowych i liniowej wyznacza współrzędne punktów. Kąty poziomy H_z i pionowy V określają w którą stronę została przez emiter i wirujące lustro urządzenia skierowana wiązka lasera. Po odbiciu od napotkanej powierzchni wiązka wraca do modułu odbiorczego. Po obliczeniu różnicy czasu pomiędzy wysłaniem i odbiorem wiązki, bądź określeniu różnicy faz następuje wyznaczenie na podstawie formuły (2.1) lub (2.2) odległości pomiędzy skanerem a punktem. Dysponując wartościami liczbowymi obserwacji H_z , V i d możliwe jest wyznaczenie współrzędnych punktu w lokalnym układzie współrzędnych skanera:

$$\begin{cases} x = d \cos(V) \cos(H_z) \\ y = d \cos(V) \sin(H_z) \\ z = d \sin(V) \end{cases} \quad (2.3)$$

Każdy pomierzony punkt w chmurze posiada zazwyczaj kilka dodatkowych atrybutów. W każdym przypadku skaner laserowy określa intensywność powracającej wiązki lasera, rozumianej jako ubytek ilości światła odebranego po odbiciu względem ilości wysłanej przez emiter [Soudarissanane, 2016]. Parametr ten zależy od wielu czynników, m.in. od odległości do obiektu, kąta padania wiązki oraz właściwości fizykochemicznych mierzonej powierzchni [Pfeifer i in., 2007], [Godin i in., 2001]. Wartości intensywności odbicia wyrażane są w dwojaki sposób. Pierwszą możliwością jest

jej wyrażenie we względnej skali od 0 do 1. Drugim rozwiązaniem jest określanie wartości liczbowej ubytku ilości światła, co przekłada się na ujemne wartości parametru intensywności. Odrębnym atrybutem, który mogą posiadać punkty w chmurze jest kolor definiowany przez wartości z palety kolorów RGB. Obecność tego atrybutu jest uwarunkowana zastosowaną w skanerze integracją urządzenia pomiarowego z aparatem cyfrowym, który po sfotografowaniu żądanego zakresu otoczenia skanera dostarcza matrycę, z której interpolowane są identyfikatory RGB koloru dla poszczególnych punktów z chmury.

2.4 Procedura pomiaru terenowego oraz rejestracji i georeferencji chmur punktów

Pomiar trwałych elementów środowiska w technologii skaningu laserowego oraz jego przedstawienie w postaci numerycznej przeprowadzane są w kilku etapach. Zgodnie z zasadami wskazanymi w akcie wykonawczym normującym geodezyjne prace terenowe, przed przystąpieniem do pomiaru należy przeprowadzić wywiad terenowy i zapoznać się z topografią obiektu [Rozporządzenie, 2011a]. W trakcie wywiadu zaplanowane zostaje rozmieszczenie stanowisk pomiarowych w taki sposób, aby po połączeniu danych w wynikowym zbiorze danych przestrzennych występowało jak najmniej braków. Ubytki te, zwane cieniami, są fragmentami przestrzeni, do których z racji obecności różnego typu przesłon i przeszkód nie może dotrzeć wiązka lasera. W związku z powyższym procedura planowania lokalizacji stanowisk pomiarowych ma duży priorytet wśród prac przygotowawczych. Dodatkowo, należy wziąć pod uwagę cel opracowania, który warunkuje oczekiwaną rozdzielczość chmury punktów, co z kolei przekłada się na określoną czasochłonność pomiaru. W przypadku zadania polegającego na zebraniu danych do opracowania zgrubnego modelu trójwymiarowego obiektu najczęściej można poprzestać na niskiej rozdzielczości chmury punktów. Z kolei przy szczegółowej inwentaryzacji obiektów architektonicznych o wielu krzywiznach zasadne jest zastosowanie dużej rozdzielczości pomiaru.

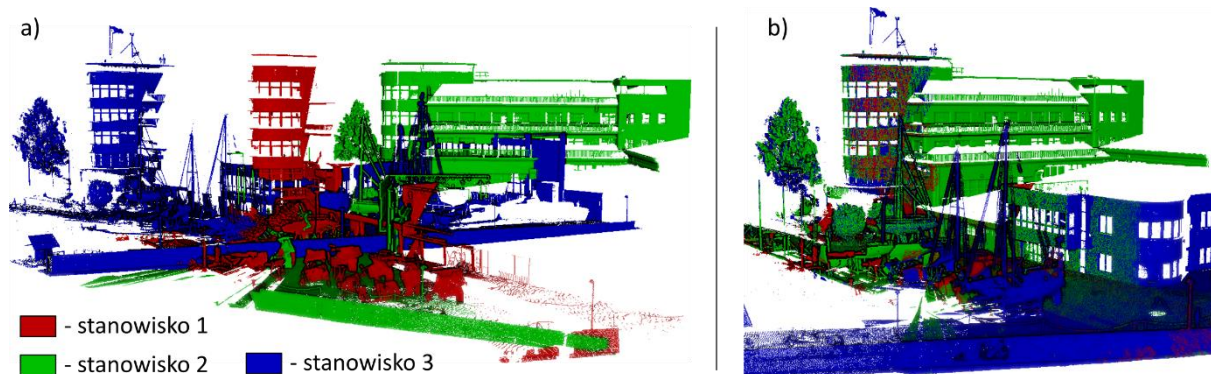
Proces rejestracji chmur punktów realizowany jest poprzez identyfikację w przestrzeni trójwymiarowej chmur punktów tych samych powierzchni i brył, bądź poprzez wyznaczenie współrzędnych konkretnych punktów wiążących [Ji i in., 2015]. W zależności od dostępnego oprogramowania na etapie pomiaru może wystąpić konieczność umieszczenia w otoczeniu obiektu dodatkowych wskaźników, które podczas opracowania danych służą do łączenia sąsiadujących ze sobą chmur punktów [Okatani i Deguchi, 2002], [Fan i in., 2015]. Wskaźniki te mogą mieć postaci kul o określonym promieniu [Lindstaedt i in., 2012], obrotowych tarcz wykonanych z materiałów o dobrych właściwościach odbijających [Lichti i in., 2005] bądź płaskich znaczników z kontrastowymi oznaczeniami do łatwej identyfikacji ich punktu centralnego [Alkan i Karsidag, 2012], [Cheng i in., 2013]. Ważnym aspektem tej czynności poprzedzającej zasadniczy pomiar jest zapewnienie korzystnej geometrii układu wskaźników skutkujący minimalizacją uzyskiwanych błędów wpasowania [Reshetyuk, 2010], [Dos Santos i in., 2013]. Wskaźniki na czas pomiaru są przytwierdzone do trwałych elementów infrastruktury za pomocą magnesów, uchwytów, taśm bądź innych metod mocowań zapewniających niezmiennność położenia na czas pomiaru. Zważywszy na fakt, iż służą one do łączenia sąsiadujących ze sobą chmur punktów, koniecznym jest zapewnienie wizury z zaplanowanych stanowisk instrumentu. Niektóre oprogramowania przeprowadzają automatyczne łączenie chmur punktów na podstawie algorytmu identyfikacji na sąsiednich skanach tych samych elementów [Pâquet, 2003], [Gruen i Akca, 2005]. Zadanie to realizowane jest przez identyfikację charakterystycznych konfiguracji punktów takich jak linie i krzywe [Habib i in., 2008], [Lee i in., 2007], powierzchnie [Huang i in., 2012], [Zhang i in., 2011], bryły [Okada i in., 2001], [Lukács i in., 1998], [Borrmann i in., 2011] lub punkty centralnych znaczników wyznaczone na bazie koloru [Bernat i in., 2014].

Po wywiadzie terenowym i uwzględnieniu wszystkich uwarunkowań technicznych i organizacyjnych przeprowadzany jest pomiar laserowy. Skaner przytwierdzany jest na stanowisku za pomocą śruby sercowej do statywu geodezyjnego. Przed rozpoczęciem pomiaru rozmieszczone są również elementy służące do późniejszej rejestracji chmur punktów. Dobrą praktyką jest sporządzenie szkicu polowego, na którym przedstawiona zostaje lokalizacja stanowisk pomiarowych oraz zastosowanych elementów łączących wraz z nadanymi im unikalnymi identyfikatorami [Rozporządzenie, 2011a]. Dzięki temu zmniejsza się ryzyko pomyłek i błędów w procesie opracowania danych. Dysponując skanerem panoramicznym możliwe jest skanowanie w pełnym zakresie kątowym instrumentu, jak również w zdefiniowanym oknie przestrzeni. Poza pozyskaniem informacji przestrzennych o otoczeniu instrumentu, w przypadkach wymagających stosowania znaczników łączących sąsiednie chmury (kule, tarcze lub inne znaczniki) są one niezależnie skanowane. Proces ten polega na zawężeniu przestrzeni skanowania do niewielkiego okna, w którym znajduje się cel oraz przeprowadzeniu pomiaru z wysoką rozdzielczością. W efekcie uzyskiwane są dodatkowe mniejsze chmury punktów służące na etapie opracowania danych do precyzyjnej identyfikacji za pomocą dedykowanych algorytmów punktów centralnych konkretnych znaczników. W tym sensie punkty centralne elementów łączących sąsiednie chmury punktów stanowią podstawę pomiarową, w oparciu o którą realizowane są transformacje współrzędnych wszystkich punktów w poszczególnych chmurach [Bronshtein i in., 2015].

W trakcie pomiaru przy wystąpieniu odbicia wiązki lasera i jej odbiorze przez skaner wyznaczana jest odległość d do punktu reprezentującego przebieg danej powierzchni (**Rys. 2.1**). Równocześnie odczytywana jest z koła poziomego i pionowego wartość kątów H_z i V , a następnie obliczane są współrzędne punktu w lokalnym układzie współrzędnych instrumentu (2.3). Przedstawiona sekwencja operacji jest realizowana z bardzo dużą szybkością dla zadanego okna przestrzeni bądź całej panoramy stanowiska, w efekcie czego na nośniku pamięci skanera zapisana zostaje chmura punktów. Niekiedy, jeżeli jest to zasadne z punktu widzenia celu opracowania, przeprowadzane jest dodatkowe szczegółowe skanowanie istotnych elementów otoczenia. Podobnie, jeżeli skaner jest wyposażony w aparat cyfrowy, realizowane jest pozyskanie dokumentacji fotograficznej otoczenia w celu późniejszego przyporządkowania poszczególnym punktom z chmury kolorów. Czynność ta niekiedy jest jedną z kluczowych w całym procesie pomiarowym [Guarnieri i in., 2004]. Podsumowując, procedura pomiarowa na pojedynczym stanowisku składa się z następujących etapów: (1) skanowania otoczenia, (2) szczegółowego skanowania wybranych elementów otoczenia, (3) skanowania elementów (znaczników) łączących sąsiednie chmury punktów oraz (4) wykonania dokumentacji fotograficznej. Trzy ostatnie z czterech wymienionych punktów uzależnione są od oprogramowania przetwarzającego chmury punktów, celu opracowania oraz ograniczeń technologicznych instrumentu.

Po pozyskaniu danych na wszystkich przewidzianych w planie stanowiskach następuje etap łączenia z użyciem stacji roboczej pojedynczych chmur punktów w jeden model przestrzenny otoczenia. Łączenie chmur punktów w jedną określane jest terminem rejestracji, powstająca zaś chmura punktów nazywana jest chmurą zarejestrowaną, wynikową bądź globalną. Zważywszy na fakt, że na każdym stanowisku zostaje utworzony nowy układ lokalny koniecznym jest przeprowadzenie stosownych operacji algebraicznych skutkujących odpowiednim ich rozmieszczeniem w przestrzeni trójwymiarowej [Soudarissanane, 2016]. Podkreślenia wymaga fakt, że w każdym przypadku punkt centralny ośrodka emisyjno-odbiorczego skanera stanowi początek lokalnego układu współrzędnych. Dodatkowo, w zależności od kierunku umieszczenia skanera na statywie nadawana jest konkretna orientacja osi OX , OY , OZ lokalnemu układowi współrzędnych (**Rys. 2.1**). Doprowadzenie zatem chmur punktów do logicznej i odpowiadającej rzeczywistości konfiguracji wymaga przeprowadzenia operacji translacji i rotacji wszystkich punktów z chmury

[Vosselman i Maas, 2010]. Stan przed i po przeprowadzeniu procesu rejestracji chmur punktów przedstawiono na *Rys. 2.2*.



Rys. 2.2. Chmury punktów z trzech sąsiednich stanowisk w niezależnych lokalnych układach współrzędnych (a) oraz po przeprowadzeniu translacji i rotacji i utworzeniu wynikowej chmury punktów (b) przedstawione w tym samym widoku perspektywicznym.

Przedstawione w trzech kolorach chmury punktów zawierają dane przestrzenne elewacji tego samego budynku (Wydziału Nawigacyjnego Uniwersytetu Morskiego w Gdyni). Rysunek w rzucie perspektywicznym został podzielony na stan przed (*Rys. 2.2 a*) i po operacji łączenia chmur punktów (*Rys. 2.2 b*). Stanowiska pomiarowe ukazane po lewej stronie charakteryzują lokalne układy współrzędnych. Ośrodek emisyjno-odbiorczy skanera stanowi w każdym z trzech przypadków początek układu współrzędnych. Sposób przytwierdzenia instrumentu do statywu zdefiniował kierunek początkowy kąta poziomego, stąd na rysunku widoczne jest nieprawidłowe rozmieszczenie trzech chmur punktów (*Rys. 2.2 a*). Prawa część rysunku prezentuje stan spójności geometrycznej i logicznej, gdzie poszczególne punkty wyznaczają w sposób ciągły powierzchnie pomierzonych obiektów. Na skutek translacji i rotacji swoje położenie zmieniły dwie z trzech chmur punktów (*Rys. 2.2 b*). W wynikowej chmurze punktów zaadaptowany zostaje lokalnych układ współrzędnych jednej z chmur punktów, który staje się układem globalnym.

W skład procedury rejestracji wchodzi translacja wektora współrzędnych punktu oraz jego rotacja [Soudarissanane, 2016], [Reshetyuk, 2009]. Pierwsza z wymienionych operacji jest definiowana poprzez zastosowanie sekwencji obrotów wokół osi układu współrzędnych. Zadanie to realizowane jest według reguły prawej ręki za pomocą elementarnych macierzy rotacji [Goldstein i in., 2001], [Reshetyuk, 2009], [Arfken i in., 2013]:

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Obrót elementarny realizowany jest poprzez lewostronny iloczyn macierzy rotacji (2.4) – (2.6) i wektora współrzędnych punktu. Z formuł wynika, że przy obrotach wokół poszczególnych osi układu zmianie nie ulega współrzędna punktu właściwa dla osi wokół której przeprowadzany jest obrót. Wskazują na to jedności położone na przekątnych macierzy elementarnych R_x , R_y , R_z . Przyjmując odmienną formę zapisu, operację rejestracji można wyrazić za pomocą formuły macierzowej realizującej obrót ciała sztywnego [Eggert i in., 1997], [Soudarissanane, 2016]:

$$\begin{bmatrix} x_{rej} \\ y_{rej} \\ z_{rej} \\ 1 \end{bmatrix} = R \cdot P + T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

gdzie x_{rej} , y_{rej} , z_{rej} oznaczają transformowane (wtórne) współrzędne punktu P o pierwotnych współrzędnych lokalnych x, y, z . R oznacza macierz transformacji, a T wektor translacji o współrzędnych T_x, T_y, T_z . Macierz R jest macierzą uwzględniającą sekwencję obrotów wokół wybranych osi układu współrzędnych OX, OY, OZ . Procedura rejestracji w oparciu o punkty jednoznacznie wskazane w sąsiadujących ze sobą chmurach punktów realizowana jest w oparciu o metodę iteracyjnego najbliższego punktu (ang. ICP - Iterative Closest Point) bazującej na metodzie najmniejszych kwadratów [Besl i McKay, 1992], [Gressin i in., 2013], [Chen i Medioni, 1992], [Rusinkiewicz i Levoy, 2001], [Al-Durgham i in., 2011]. Z kolei metoda obiektowa wykorzystuje parametry geometryczne wyznaczone na podstawie położenia obiektów występujących na sąsiednich chmurach punktów [Rabbani i in., 2007], [Brenner i in., 2008]. Jeden z lokalnych układów współrzędnych zostaje przyjęty jako układ globalny, do którego na drodze rejestracji doprowadzane są współrzędne pozostałych chmur punktów.

Odrębnym zagadnieniem związanym z tematyką skaningu laserowego jest georeferencja chmur punktów [Reshetyuk, 2009]. Zdarzają się przypadki gdy zasadnym jest przypisanie wynikowej chmurze punktów współrzędnych z wybranego państwowego lub innego powszechnie stosowanego układu współrzędnych. Pozwala to na harmonizację danych przestrzennych pochodzących z różnych źródeł [Ustawa, 2010]. Do przypisania georeferencji chmurze punktów, podobnie jak w przypadku rejestracji, wymagana jest znajomość współrzędnych punktów w obu układach: pierwotnym i wtórnym. Na drodze przedstawionych wcześniej algorytmów następuje wyznaczenie parametrów kąta rotacji chmury punktów oraz współrzędnych wektora translacji, które definiują stosowne macierze transformacji.

3 Odwzorowania kartograficzne

Przedstawianie powierzchni Ziemi na płaszczyźnie mapy od niemal 2500 lat stanowiło przedmiot dociekań człowieka [Snyder i Voxland, 1989]. Różne teorie począwszy od starożytności próbowały określić naturę i formę Ziemi. Przykładem może być twierdzenie, że Ziemia jest dyskiem utrzymywanym przez cztery słonie stojące na żółwiu [Łyszkowicz, 2006]. Należy jednak zwrócić uwagę, że również w tej epoce pojawiło się pierwsze podejście do wyznaczenia sferycznego kształtu Ziemi przez Eratostenesa, którego podstawowe założenie nie zmieniło się niemal do czasów współczesnych [Czarnecki, 1994]. Sferyczna definicja kształtu Ziemi utrzymywała się do końca XIX wieku. Kolejne stulecie jest okresem gwałtownego rozwoju badań w tej dziedzinie. Prezentowane są bowiem w relatywnie niewielkich odstępach czasu kolejne elipsoidy obrotowe, m.in. Helmerta i Hayforda, Krasowskiego [Kryński i Rogowski, 2004]. W drugiej połowie XX wieku pojawiły się kolejne aproksymacje kształtu Ziemi charakteryzujące się coraz mniejszymi różnicami w definiujących je parametrach. Przykładowo, najczęściej wykorzystywane obecnie elipsoidy obrotowe WGS84 i GRS80 posiadają jednakową długość dłuższej półosi równikowej, a odmienne wartości spłaszczenia przekładają się na różnicę w długości krótszej półosi biegunowej wynoszącą jedynie 0.0001 m [Moritz, 1980], [Decker, 1986]. Biorąc to pod uwagę można postawić tezę, że oba modele są niemal tożsame pod względem parametrów geometrycznych.

Powierzchnia aproksymująca kształt Ziemi ma fundamentalne znaczenie dla kartografii matematycznej. Drugim niezwykle ważnym elementem są formuły matematyczne odwzorowań kartograficznych realizujących zobrazowanie wypukłej powierzchni pierwotnej (sfery lub elipsoidy obrotowej) na płaszczyznę mapy [Różycki, 1978]. W literaturze pojawiają się odpowiedniki nazewnictwa obu powierzchni w postaci oryginału (sfera lub elipsoida obrotowa) oraz obrazu (płaszczyzny) [Gajderowicz, 2009]. Wspomniane formuły matematyczne definiują w sposób jednoznaczny przyporządkowanie współrzędnych odpowiadających sobie punktów na obu powierzchniach [Różycki, 1950]. Zależność ta określana jest również terminem odpowiedniości punktowej [Biernacki, 1949] i wyrażona w postaci funkcji współrzędnych obu układów. Obecnie w przypadku map małoskalowych przyjmuje się sferę za powierzchnię odniesienia. Elipsoida obrotowa stosowana jest w bardziej szczegółowych opracowaniach w postaci map średnioskalowych i wielkoskalowych [Pędzich, 2014]. Drugi przypadek obejmuje również opracowania mapowe bazujące na europejskiej elipsoidzie obrotowej GRS80 i stosowane w obrocie prawnym i gospodarczym Rzeczypospolitej Polskiej [Ustawa, 1989], [Rozporządzenie, 2012], [Rozporządzenie, 2011a].

Przyporządkowanie punktom powierzchni Ziemi ich odpowiedników na płaszczyźnie mapy jest sposobem prezentowania rozmaitych zjawisk i procesów. Atrybutami poszczególnych punktów, obiektów liniowych i powierzchniowych prezentowanych na mapie są znaczniki graficzne prezentujące według konkretnego klucza wybrane charakterystyki obszaru, np. poprzez katalogi symboli i oznaczeń [Rozporządzenie, 2015], [Rozporządzenie, 2011b], [PKP, 2016]. W ten sposób budowany jest model kartograficznego przekazu informacji realizujący przedstawienie odbiorcy przez twórcę wybranego aspektu rzeczywistości w postaci mapy [Koláčny, 1969], [Medyńska-Gulij, 2012]. Duży wkład w praktyczny rozwój dziedziny wniosła informatyzacja procesu przetwarzania danych przestrzennych [Gaździcki, 1975] oraz ich wizualizacja [Medyńska-Gulij, 2017], [Żyszkowska i in., 2012], [Robinson i in., 1988]. Obecnie powszechnym obszarem zastosowania kartografii są aplikacje mobilne bazujące na urządzeniach ze stałym dostępem do internetu i odpowiednich baz danych przechowujących i udostępniających wybrane fragmenty mapy użytkownikom w czasie rzeczywistym. Warto podkreślić, że upowszechnienie finalnego produktu nie nastąpiłoby bez stosowania teorii kartografii matematycznej formułowanych przez badaczy na przestrzeni wieków. Na przestrzeni

wieków powstały i rozwinęły się również metody pozyskiwania danych przestrzennych, ich przetwarzania numerycznego oraz tworzenia (kartowania) arkuszy mapowych [Flis, 1973], [Osowski i Brokman, 1970].

3.1 Zarys teorii odwzorowań kartograficznych

Powierzchnie będące przedmiotem odwzorowań kartograficznych są określone za pomocą równań parametrycznych. Charakteryzują je ściśle określone zależności pomiędzy trójwymiarowymi współrzędnymi ortokartezjańskimi x, y, z i współrzędnymi krzywoliniowymi u, v w postaci funkcji $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$. Warunkiem koniecznym dla stanowienia przez funkcje powierzchni jest niezależność co najmniej dwóch spośród trzech jacobianów. Tym samym wyznaczniki funkcyjne dla każdej pary funkcji nie mogą posiadać zerowych wartości [Biernacki, 1973]. Stałe wartości parametrów u, v wyznaczają linie parametryczne, które tworzą siatkę współrzędnych krzywoliniowych powierzchni.

Funkcje punktu powierzchni charakteryzujące właściwości metryczne tej powierzchni nazywane są wielkościami podstawowymi pierwszego rzędu. Oznaczone są one symbolami E, F, G, H i wyznaczane w oparciu o różniczkowy przyrost współrzędnych krzywoliniowych du i dv pomiędzy dwoma punktami powierzchni. Wyrażając ten przyrost za pomocą współrzędnych ortokartezjańskich uzyskuje się kwadrat elementu liniowego ds^2 o nieskończenie małej długości [Łomnicki, 1927]:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.1)$$

Obliczając pochodne cząstkowe współrzędnych ortokartezjańskich x, y, z względem współrzędnych krzywoliniowych u, v i podstawiając je do poprzedniego równania otrzymuje się tzw. pierwszą formę kwadratową powierzchni [Różycki, 1978]:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (3.2)$$

gdzie:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

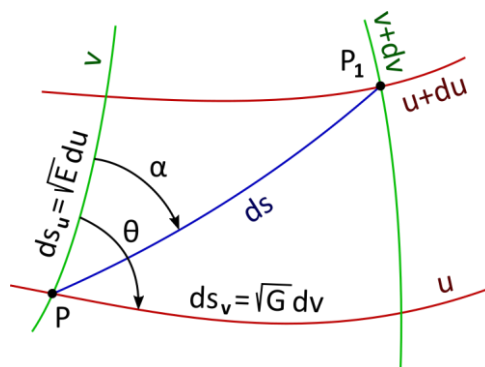
$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$H = \sqrt{EG - F^2}.$$

Współczynniki E, F, G i H charakteryzują właściwości metryczne powierzchni. Graficzną interpretacją pierwszej formy kwadratowej jest elementarny czworobok krzywoliniowy przedstawiony na **Rys. 3.1**. Obliczanie długości pomiędzy punktami na powierzchni o krzywoliniowych liniach parametrycznych realizowane jest za pomocą rachunku całkowego. Dla stałych wartości współrzędnych krzywoliniowych u oraz v charakterystyczne są zerowe przyrosty drugiej

ze współrzędnych. Po uwzględnieniu tego warunku w równaniu (3.2) uzyskuje się długości liniowych elementów ds_u i ds_v .



Rys. 3.1. Elementarny czworobok krzywoliniowy.

Prowadząc w punkcie P styczne względem elementów liniowych ds , ds_u i ds_v wyznaczane są wartości kątów zawartych pomiędzy nimi. Wartości kąta kierunkowego punktu P_1 względem punktu P (kąt kierunkowy α) oraz kąta zawartego pomiędzy liniami siatki współrzędnych w punkcie P (kąt parametryczny ϑ) oblicza się za pomocą następujących formuł [Biernacki, 1973]:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{H} dv}{E du + F dv}\right), \quad (3.3)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{H}}{F}\right). \quad (3.4)$$

Współrzędne ortokartezjańskie na powierzchni obrazu są również funkcjami współrzędnych krzywoliniowych u, v o ogólnej postaci $x'(u, v)$, $y'(u, v)$, $z'(u, v)$. Analogicznie jak w przypadku powierzchni oryginału, formułuje się charakterystyczne dla niej wielkości podstawowe pierwszego rzędu wynikające z właściwości obrazu elementarnego czworoboku liniowego [Różycki, 1978]:

$$ds'^2 = E' du^2 + 2F' dudv + G' dv^2, \quad (3.5)$$

gdzie:

$$E' = \left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right)^2,$$

$$F' = \left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y'}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial v}\right),$$

$$G' = \left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial v}\right)^2,$$

$$H' = \sqrt{E'G' - F'^2}.$$

Wartości podstawowych (metrycznych) wielkości pierwszego rzędu na obu powierzchniach wskazują na cechy charakterystyczne odwzorowania. W kartografii wyróżnia się odwzorowania izometryczne i nieizometryczne [Biernacki, 1973]. Pierwsze z nich charakteryzuje się stałością stosunku

długości łuku na powierzchni oryginału i obrazu oraz wiążącą się z tym faktem równością odpowiadających sobie parametrów $E = E'$, $F = F'$, $G = G'$ [Łomnicki, 1927]. Ponadto, w przypadku odwzorowań izometrycznych zachodzi konforemność i równopolowość. Warto odnotować, że powierzchnie aproksymujące kształt Ziemi (sfera i elipsoida obrotowa) oraz płaszczyzna mapy nie są powierzchniami izometrycznymi. W związku z tym każde ich odwzorowanie na płaszczyznę będzie odwzorowaniem nieizometrycznym, a więc takim, które będzie cechowało się równopolowością lub równokątnością (konforemnością) [Biernacki, 1973]. Długości krzywej na powierzchni oryginału oraz na powierzchni obrazu informują o elementarnej μ . Przy regularnym odwzorowaniu w punkcie o współrzędnych u, v i kierunku określonym przez iloraz du/dv skala długości wyznaczana jest poprzez formułę [Biernacki, 1949]:

$$\mu = \frac{ds'}{ds} = \frac{E' du^2 + 2F' dudv + G' dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2}. \quad (3.6)$$

Z powyższego równania, zgodnie z pierwszym twierdzeniem Tissota o siatkach ortogonalnych, wyznacza się skale długości w kierunkach linii parametrycznych m_u, m_v [Łomnicki, 1927]. Przyjęcie stałości współrzędnej krzywoliniowej u lub v wiąże się z zerowym przyrostem drugiej współrzędnej krzywoliniowej. Tym samym równanie (3.6) ulega uproszczeniu do postaci [Różycki, 1978]:

$$m_u = \sqrt{\frac{E'}{E}}, \quad m_v = \sqrt{\frac{G'}{G}}. \quad (3.7), (3.8)$$

Gdy zarówno linie parametryczne na powierzchni oryginału, jak i na powierzchni obrazu przecinają się pod kątem prostym, to wtedy linie te tworzą siatkę krzywych głównych [Gajderowicz, 2009]. Podstawowe wielkości pierwszego rzędu F (3.2) i F' (3.5) przyjmują wówczas wartości zerowe, a skala długości określona jest zależnością:

$$\mu = \frac{E' du^2 + G' dv^2}{E du^2 + G dv^2}. \quad (3.9)$$

Zakładając ponownie stałość współrzędnych krzywoliniowych u, v uzyskuje się wartości skal długości w kierunkach głównych odwzorowania m_1, m_2 :

$$m_1 = \sqrt{\frac{E'}{E}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{G'}{G}}. \quad (3.10), (3.11)$$

Stosując powyższe zależności w formułach odwzorowania elipsoidy obrotowej na płaszczyznę uzyskuje się następujące wartości skal długości w kierunkach południka (m_B) i równoleżnika (m_L) [Biernacki, 1973], [Gajderowicz, 2009], [Szpunar, 1982], [Zakatow, 1959]:

$$m_B = \frac{\sqrt{E'}}{M}, \quad m_L = \frac{\sqrt{G'}}{N \cos B} = \frac{\sqrt{G'}}{r}, \quad (3.12), (3.13)$$

gdzie:

B - szerokość elipsoidalna punktu,

M, N - długości promieni krzywizny przekroju południkowego i poprzecznego,

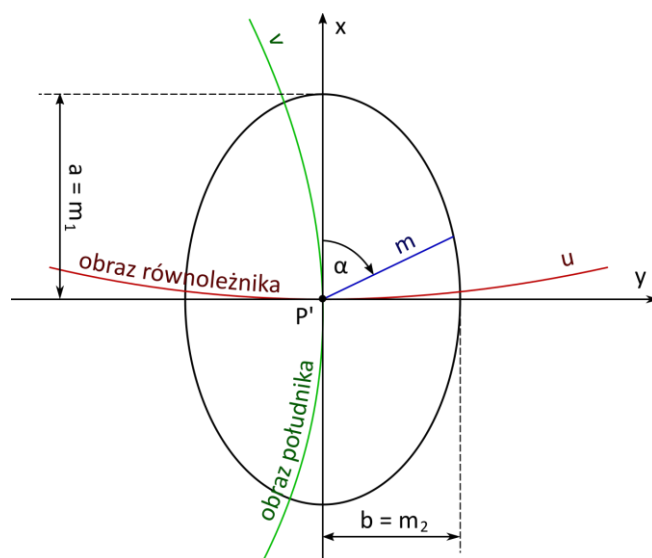
r - promień równoleżnika.

W przypadku odwzorowania sfery na płaszczyznę skale długości w kierunkach południka (m_ϕ) i równoleżnika (m_λ) obliczane są następująco [Różycki, 1978]:

$$m_\phi = \frac{\sqrt{E'}}{R}, \quad m_\lambda = \frac{\sqrt{G'}}{R \cos \phi} = \frac{\sqrt{G'}}{r}, \quad (3.14), (3.15)$$

gdzie R oznacza promień sfery aproksymującej kształt Ziemi.

Zgodnie z drugim prawem Tissota, graficzną reprezentacją skal długości w danym punkcie jest elipsa, której długości półosi są równe skalom długości w kierunkach głównych [Gajderowicz, 2009]. Obliczenie skali długości w dowolnym kierunku (m) następuje w sposób analityczny bądź w sposób przybliżony metodą graficzną (Rys. 3.2). W drugim przypadku wynik uzyskuje się poprzez pomiar odległości pomiędzy geometrycznym środkiem figury a punktami na elipsie położonymi na badanym kierunku oraz na kierunku powiększonym o kąt 90° . Podejście analityczne uzależnia skale długości od wartości kąta kierunkowego. W literaturze zaprezentowane są stosowne wyprowadzenia bazujące na rachunku różniczkowym [Różycki, 1978] oraz zależnościach pomiędzy elementarnym okręgiem na powierzchni oryginału i jego obrazem (elipsą) [Gajderowicz, 2009], [Biernacki, 1973].



Rys. 3.2. Elipsa zniekształceń (wskaźnica Tissota).

Kąt kierunkowy orientacji elipsy zniekształceń jest funkcją wartości podstawowych wielkości pierwszego rzędu E, F, G (3.2) i E', F', G' (3.5) [Biernacki, 1973]:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\frac{F'}{\sqrt{E \cdot G}}}{\frac{E'}{E} - \frac{G'}{G}} \right). \quad (3.16)$$

Rozkład wskaźnic Tissota w wybranych regularnie rozmieszczonych punktach przecięć siatki obrazów linii parametrycznych u, v informuje o charakterze zniekształceń danego odwzorowania. Uzyskane długości półosi elipsy, będące równocześnie skalami długości w kierunkach głównych mogą posłużyć do wyznaczenia elementarnej skali pól w danym punkcie [Różycki, 1950]. Skalę pól (p) oblicza się, analogicznie jak skalę długości, jako iloraz odpowiadających sobie elementów pól dP' i dP

właściwych dla powierzchni obrazowej i powierzchni oryginału. Korzystając z teorii powierzchni, wymienione elementy można wyznaczyć za pomocą formuł [Różycki, 1978]:

$$dP = \sqrt{EG - F^2} dudv, \quad dP' = \sqrt{E'G' - F'^2} dudv. \quad (3.17), (3.18)$$

W przypadku siatki krzywych głównych odwzorowania iloraz $p = dP'/dP$ upraszcza się do postaci $p = m_1 m_2$. Tym samym skalę pól można obliczyć z elipsy zniekształceń na podstawie pomierzonych metodą graficzną skal długości w kierunkach głównych. Zależność ta umożliwia wykorzystanie elips zniekształceń jako środka do przedstawiania charakteru i właściwości odwzorowania kartograficznego.

3.2 Klasyfikacja odwzorowań kartograficznych

Odwzorowania kartograficzne podlegają podziałowi na dwie zasadnicze kategorie [Różycki, 1978], [Churski i Galon, 1996]. Pierwszą kategorią jest kryterium charakteru zniekształceń odwzorowawczych. Drugą z nich stanowi podział odwzorowań ze względu na kształt siatki południków i równoleżników. Trzecim niezależnym kryterium jest sposób wykorzystania odwzorowań kartograficznych. W pierwszej grupie bazującej na zniekształceniach występują odwzorowania równokątne, równopolowe i dowolne. Warunek równokątności wiąże się z równością długości półosi elips zniekształceń odwzorowawczych. Tym samym na mapach występuje szczególny przypadek elips w postaci okręgów, gdzie skale długości w danym punkcie w dowolnym kierunku mają jednakową długość [Różycki, 1950]:

$$m_\phi = m_\lambda = m_1 = m_2 = \mu. \quad (3.19)$$

Odwzorowania równopolowe cechują się brakiem zniekształceń pól na płaszczyźnie obrazowej. Odwołując się ponownie do elipsy zniekształceń, wiąże się to z faktem, że długości półosi m_1 i m_2 cechuje zasada odwrotnej proporcjonalności [Różycki, 1978]:

$$m_1 = \frac{1}{m_2}, \quad m_2 = \frac{1}{m_1}. \quad (3.20), (3.21)$$

Tym samym skala pól p , będąca iloczynem skal długości w kierunkach głównych (3.10) – (3.11), dla każdego punktu powierzchni pierwotnej jest równa jedności.

Ostatnią podkategorię w kryterium charakterystyki zniekształceń odwzorowawczych stanowią odwzorowania dowolne, w których nie zachodzi żaden z powyższych warunków. Uzyskiwane są zamiast tego inne istotne właściwości metryczne płaszczyzny obrazowej. Przykładowo, w odwzorowaniach równoodległościowych jedna ze skal długości w kierunkach głównych (m_1 lub m_2) jest równa jedności. Warto podkreślić, że ten rodzaj odwzorowania jest formą pośrednią pomiędzy wcześniejszymi, gdyż występujące w odwzorowaniu dowolnym zniekształcenia kątów są mniejsze niż w odwzorowaniu równopolowym, a zniekształcenia pól mniejsze niż w odwzorowaniu równokątnym [Różycki, 1978].

Drugim wymienionym kryterium podziału odwzorowań kartograficznych jest kształt siatki na powierzchni obrazu. Wyróżnia się tutaj m.in. odwzorowania azymutalne, walcowe, stożkowe, pseudoazymutalne, pseudowalcowe, pseudostożkowe, wielostożkowe i koliste [Wilgat, 1959], [Szaflarski, 1965]. Dodatkowym czynnikiem wprowadzającym kolejny rząd gradacji jest kwestia sposobu przyłożenia powierzchni obrazowej do powierzchni oryginału (sfery lub elipsoidy obrotowej). Rozróżnia się tutaj odwzorowania normalne, ukośne i poprzeczne [Gajderowicz, 2009], [Churski

i Galon, 1996]. Każde z odwzorowań posiada unikalne cechy warunkujące zasadność jego wykorzystania dla zobrazowania konkretnych obszarów Ziemi. Przykładowo, do zobrazowania obszarów biegunów ziemskich wykorzystuje się odwzorowanie azymutalne normalne, gdzie obrazem równoleżników są koncentryczne okręgi z biegunem jako ich punktem środkowym. Obrazem południków jest pęk półprostych wywodzących się z bieguna. Tym samym kąty pomiędzy nimi nie ulegają zniekształceniu. Wzajemna konfiguracja obrazów równoleżników jest uzależniona od dodatkowych właściwości odwzorowania, np. dotyczących charakteru zniekształceń kątów lub pól powierzchni.

Rozpatrując spośród wszystkich odwzorowań stosowanych w kartografii jedynie odwzorowania regularne należy stwierdzić, że ich liczba i różnorodność jest bardzo duża. Literatura przedmiotu zawiera szereg publikacji stanowiących przegląd opracowanych i opublikowanych odwzorowań powierzchni Ziemi, np. [Snyder i Voxland, 1989], [Churski i Galon, 1996], [Pędzich, 2014], [Różycki, 1953].

3.3 Przykłady aplikacyjne wybranych odwzorowań kartograficznych

W rozdziale przedstawiono wybrane popularne odwzorowania stosowane w kartografii. Ogólne informacje historyczne połączono z formułami funkcji odwzorowawczych oraz dołączono jakobiany, na podstawie których wyznaczane są podstawowe wielkości pierwszego rzędu E , F , G , H oraz inne współczynniki określające charakter zniekształceń odwzorowania. Rozdział zawiera ilustracje prezentujące kształt siatki linii parametrycznych na płaszczyźnie obrazowej całego globu oraz mniejszy wycinek obejmujący jedynie rejon Morza Bałtyckiego. Powyższe uszczegółowienie ma na celu przedstawić różnice pomiędzy poszczególnymi odwzorowaniami. Dla szczegółowego przedstawienia zniekształceń odwzorowawczych na wybranym fragmencie mapy umieszczono trzy wskaźnice Tissota.

3.3.1 Odwzorowanie azymutalne równopolowe Lamberta

Odwzorowanie zostało sformułowane przez szwajcarskiego uczonego Jana Henryka Lamberta w drugiej połowie XVIII w. Powierzchnia obrazu ustawiona jest w pozycji normalnej, tj. w sposób styczny do bryły Ziemi na biegunie północnym (**Rys. 3.3**). Współrzędne punktów w odwzorowaniu oblicza się za pomocą zależności [Pędzich, 2014]:

$$x' = 2R \sin\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right) \cos(\lambda), \quad y' = 2R \sin\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right) \sin(\lambda), \quad (3.22), (3.23)$$

gdzie:

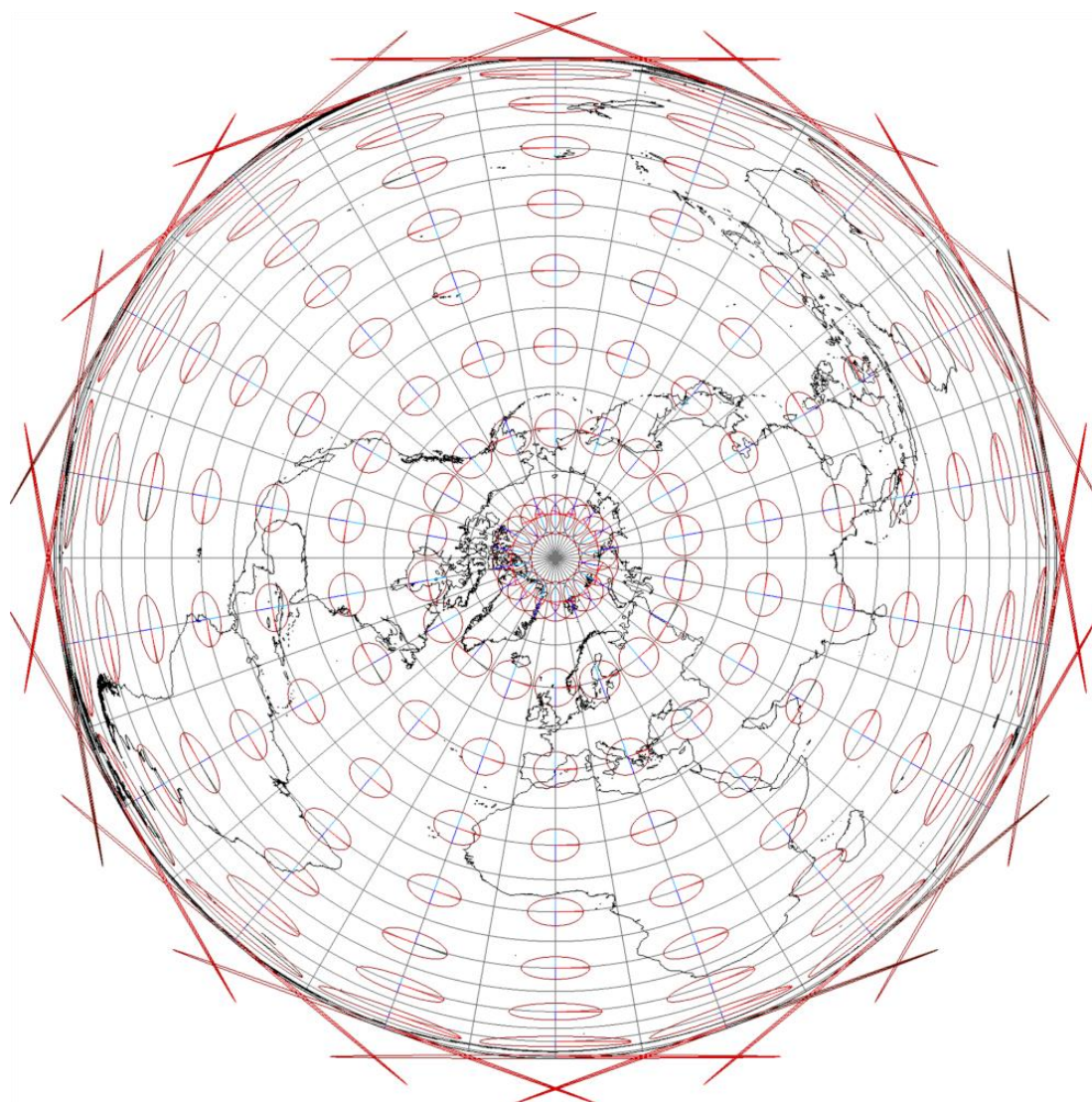
x' , y' – współrzędne ortogonalne płaskie,

R – promień sfery aproksymującej kształt Ziemi,

ϕ , λ – szerokość i długość geograficzna punktu.

Jakobian odwzorowania ma następującą postać:

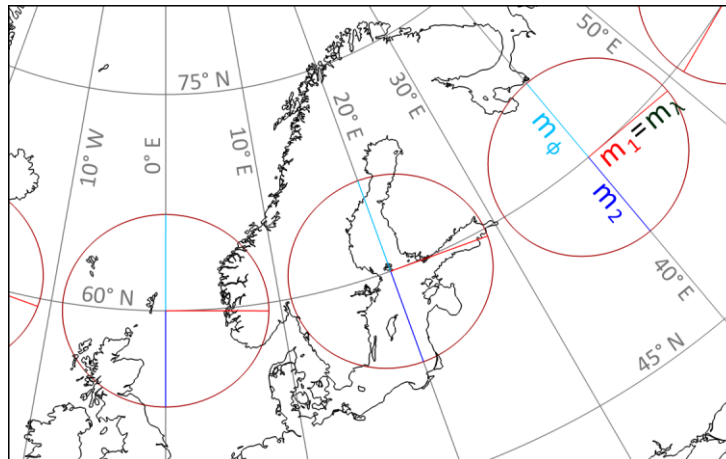
$$J = \begin{bmatrix} -R \cos\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right) \cos(\lambda) & -2R \sin\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right) \sin(\lambda) \\ -R \cos\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right) \sin(\lambda) & 2R \sin\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right) \cos(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$



Rys. 3.3. Odwzorowanie azymutalne równopolowe Lamberta z biegunem północnym jako punktem centralnym.

Obrazem równoleżników są koncentryczne okręgi z biegunem północnym jako ich środkiem. Obrazem południków jest pęk półprostych wychodzących z bieguna. Odwzorowanie spełnia warunek równopolowości ($\rho = 1$), stąd pole powierzchni wszystkich elips zniekształceń jest jednakowe [Snyder i Voxland, 1989]. Odległość pomiędzy kolejnymi, patrząc od strony bieguna północnego ku południowemu, okręgami obrazującymi równoleżniki stopniowo się zmniejsza. Warto zaznaczyć, że drugi biegun odwzorowuje się w postaci ostatniego zewnętrznego okręgu [Snyder, 1987]. Obszar basenu Morza Bałtyckiego w odwzorowaniu azymutalnym równopolowym Lamberta został przedstawiony na **Rys. 3.4**.

Odwzorowanie znajduje zastosowanie w przedstawianiu rozległych obszarów państw lub kontynentów, stąd często mapy wykorzystujące zaprezentowane rozwiązanie umieszczone są w atlasach geograficznych [Pędzich, 2014], ze szczególnym uwzględnieniem wschodniej i zachodniej hemisfery, jak również obszaru mórz i oceanów [Snyder, 1987].



Rys. 3.4. Wybrane wskaźnice Tissota w odwzorowaniu azymutalnym równopolowym Lamberta obszaru Morza Bałtyckiego.

3.3.2 Odwzorowanie walcowe równopolowe Lamberta

Odwzorowanie, podobnie jak poprzednie, zostało sformułowane przez Jana Henryka Lamberta [Snyder, 1987]. Walec, na którego powierzchnię następuje proces odwzorowania powierzchni Ziemi ustawiony jest w pozycji normalnej (Rys. 3.5), tj. z osią walca pokrywającą się z odcinkiem łączącym oba bieguny [Snyder i Voxland, 1989]. Realizacja odwzorowania sfery na płaszczyznę odbywa się na drodze następujących formuł funkcji odwzorowawczych [Pędzich, 2014]:

$$x' = \frac{R \sin(\varphi)}{\sin(\varphi_k)}, \quad y' = R \cos(\varphi_k) \lambda, \quad (3.25), (3.26)$$

gdzie:

x', y' – współrzędne ortogonalne płaskie,

R – promień sfery aproksymującej kształt Ziemi,

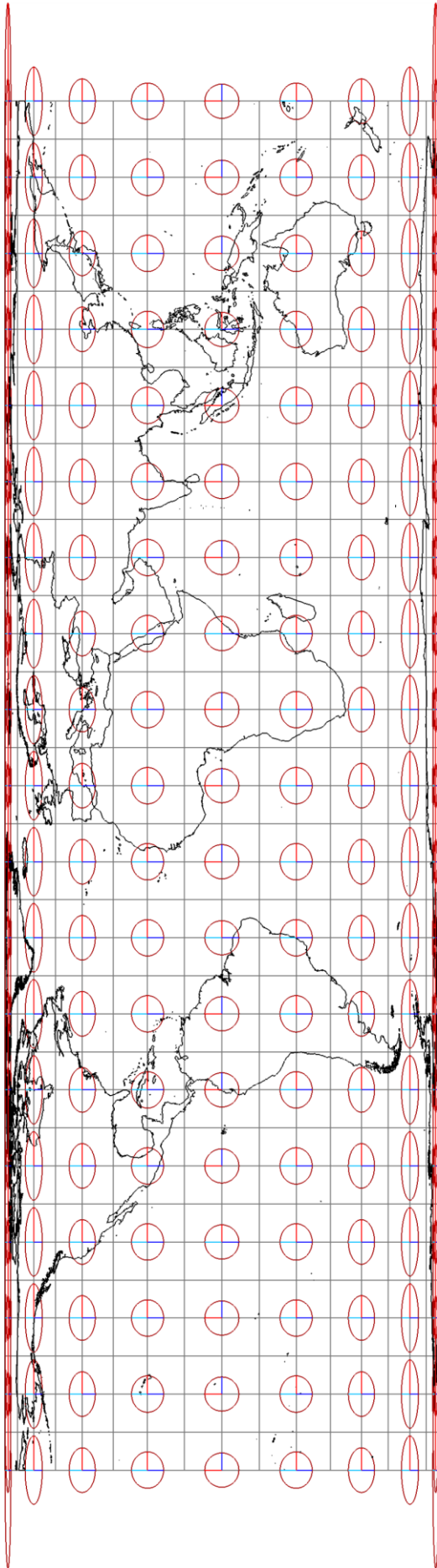
φ, λ – szerokość i długość geograficzna punktu,

φ_k – szerokość geograficzna dla której nie występują zniekształcenia odległości.

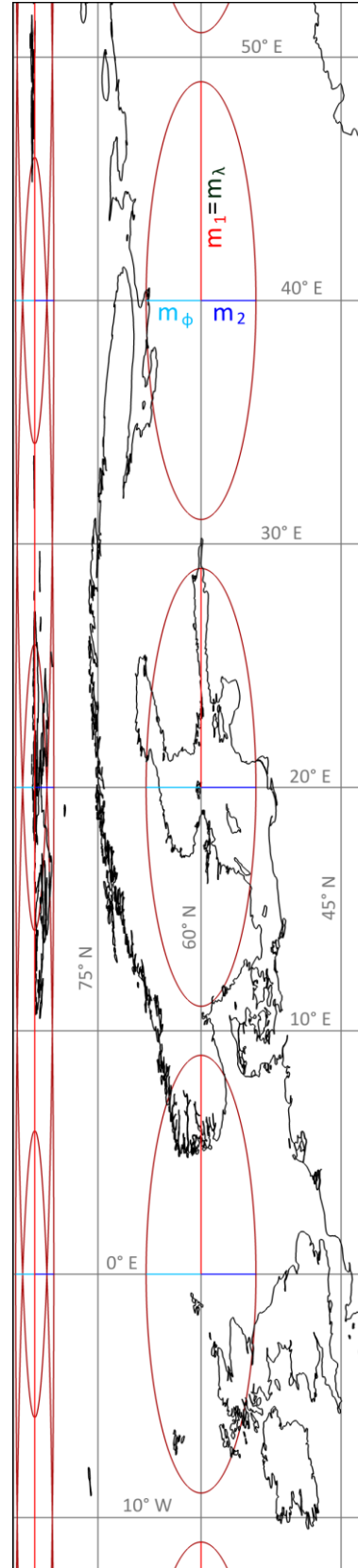
Jakobian odwzorowania ma następującą postać:

$$J = \begin{bmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\varphi_k) & 0 \\ 0 & R \cos(\varphi_k) \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Zobrazowanie okolic Morza Bałtyckiego oraz trzech wybranych wskaźnic Tissota w odwzorowaniu walcowym równopolowym Lamberta przedstawiono na Rys. 3.6. Odwzorowanie ma duże zastosowanie dydaktyczne z powodu przejrzystego przedstawiania podstawowych własności odwzorowań [Pędzich, 2014]. Uzyskanie warunku równopolowości następuje dzięki rozmieszczeniu obrazów równoleżników proporcjonalnie do sinusa kąta szerokości geograficznej [Snyder, 1987]. Charakterystyczny dla odwzorowania rozkład stosunkowo niewielkich zniekształceń w okolicach równika skutkowało użyciem tego odwzorowania dla zobrazowania obszarów o małych szerokościach geograficznych oraz krajów o konturze granic rozciągniętych w osi północ – południe [Snyder, 1987].



Rys. 3.5. Odzworowanie walcowe równopolowe Lamberta dla $\varphi_k = 0$.



Rys. 3.6. Wybrane wskaźnice Tissota w odzworowaniu walcowym równopolowym Lamberta obszaru Morza Bałtyckiego.

3.3.3 Odwzorowanie walcowe poprzeczne równokątne Lamberta

Kolejne z odwzorowań utożsamiane jest z nazwiskami kilku uznanych matematyków i kartografów [Snyder, 1987]. Z racji chronologii autorstwo należy przypisać ponownie J. H. Lambertowi. Wyniki jego pracy rozwinął niemiecki uczoney Karol Fryderyk Gauss podczas przetwarzania wyników obserwacji geodezyjnych sieci triangulacyjnej Hanoweru. Kolejnym badaczem jest Ludwik Krüger, który w pierwszej połowie XIX w. usystematyzował i opublikował teorię odwzorowania. Od nazwisk dwóch ostatnich badaczy przyjęła się nazwa, pod którą w Europie jest ono rozpoznawane (odwzorowanie Gaussa-Krügera). Z kolei w Stanach Zjednoczonych Ameryki Północnej odwzorowanie utożsamiane jest z postacią Gerarda Kremera, wybitnego flamandzkiego kartografa, który przyjął pseudonim Mercator. Stąd, przyjęta tam nazwa to odwzorowanie poprzeczne Mercatora. Zobrazowanie globu ziemskiego w odwzorowaniu walcowym poprzecznym równokątnym Lamberta przedstawiono na **Rys. 3.8**. Współrzędne punktów w odwzorowaniu oblicza się za pomocą zależności [Pędzich, 2014]:

$$x' = \frac{R}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos(\phi) \sin(\lambda)}{1 - \cos(\phi) \sin(\lambda)} \right), \quad y' = R \arctan \left(\frac{\tan(\phi)}{\cos(\lambda)} \right). \quad (3.28), (3.29)$$

gdzie:

x', y' – współrzędne ortogonalne płaskie,

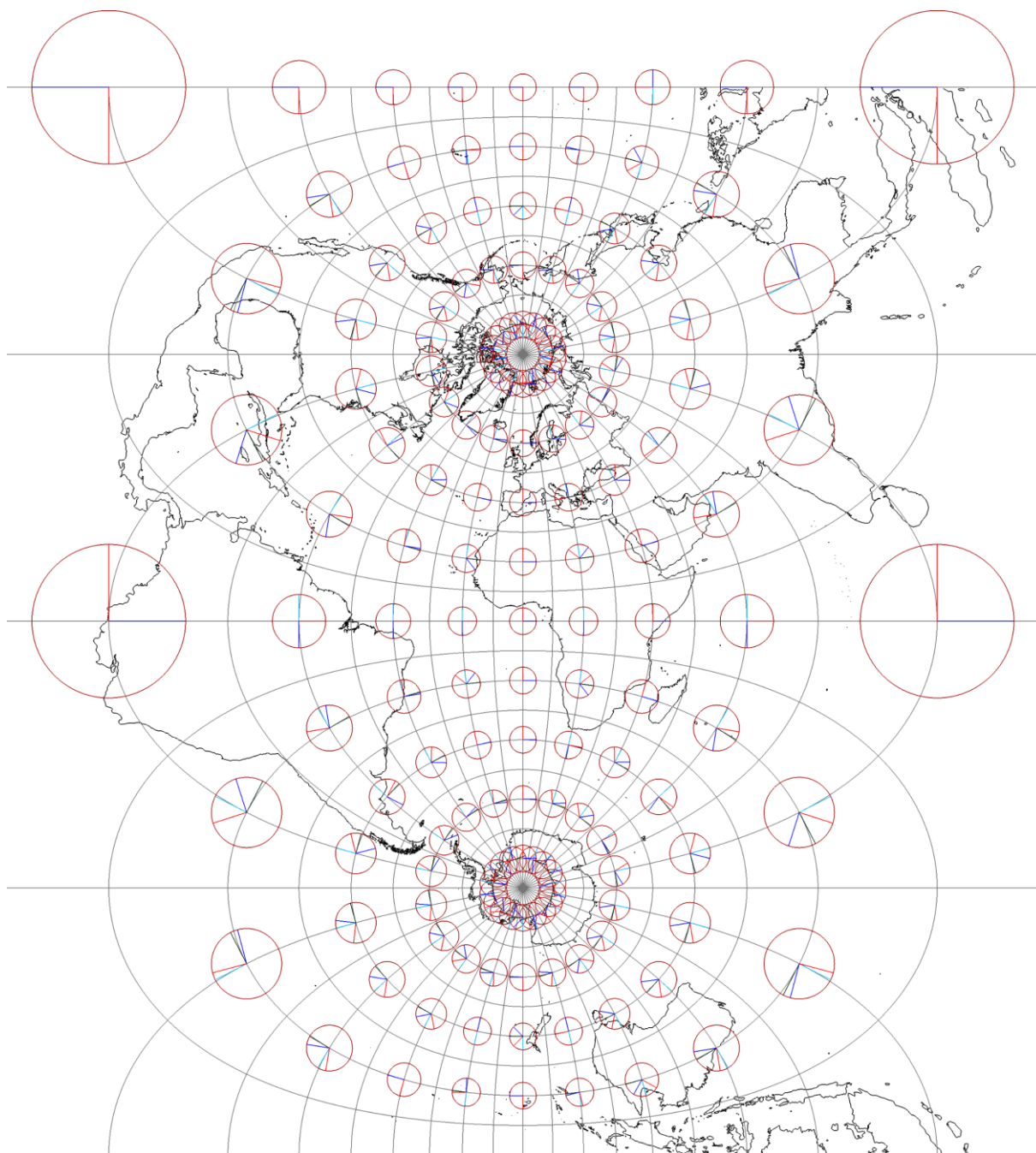
R – promień sfery aproksymującej kształt Ziemi,

ϕ, λ – szerokość i długość geograficzna punktu.

Jakobian odwzorowania ma następującą postać:

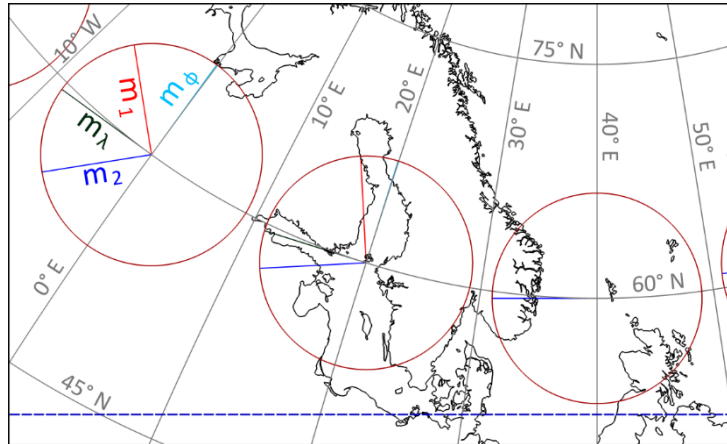
$$J = \begin{bmatrix} \frac{R \sin(2\phi) \sin^2(\phi) \sin^4(\lambda)}{(1 - \cos(\phi) \cos(\lambda))(1 + \cos(\phi) \sin(\lambda))} & \frac{R \cos^3(\phi) \cos^3(\lambda)}{(1 - \cos(\phi) \cos(\lambda))(1 + \cos(\phi) \sin(\lambda))} \\ \frac{R(\cos(\lambda) + \sin(\phi) \cos(\phi) \sin(\lambda))}{\cos^4(\phi) \cos^2(\lambda) \left(1 + \left(\frac{\tan(\phi)}{\cos(\lambda)} \right)^2 \right)} & \frac{-R \tan(\phi) \tan^2(\lambda)}{1 + \left(\frac{\tan(\phi)}{\cos(\lambda)} \right)^2} \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Oś wykorzystanego w odwzorowaniu walca przebiega w płaszczyźnie równika ziemskiego (konfiguracja poprzeczna). Krawędź styczności przebiega wzdłuż jednego z południków, na którym nie występują zniekształcenia liniowe [Snyder, 1987]. W przedstawionym na **Rys. 3.7** przypadku jest to południk Greenwich. Cechą odwzorowania jest uzyskiwanie obrazu czterech południków jako odcinków linii prostych (tutaj są to południki 0°, 90° E, 180°, 90° W) [Snyder i Voxland, 1989]. Zobrazowanie basenu Morza Bałtyckiego w odwzorowaniu przedstawiono na **Rys. 3.8**.



Rys. 3.7. Odwzorowanie walcowe poprzeczne równokątne Lamberta.

Założenia odwzorowania zostały wykorzystane do stworzenia popularnego na całym świecie rozwiązania pochodnego, znanego w nomenklaturze anglojęzycznej pod nazwą Universal Transverse Mercator (UTM). Modyfikacja pierwotnej postaci odwzorowania polega na przyjęciu współczynnika skali wynikającego z siecznego sposobu umieszczenia walca [Snyder i Voxland, 1989]. Opracowaniami mapowymi, w których wykorzystano to odwzorowanie są mapy topograficzne lub tematyczne [Pędzich, 2014].



Rys. 3.8. Wybrane wskaźnice Tissota w odwzorowaniu walcowym poprzecznym równokątnym Lamberta obszaru Morza Bałtyckiego.

3.3.4 Odwzorowanie walcowe normalne równokątne Mercatora

Twórcą odwzorowania jest wspomniany wcześniej Gerard Kremer (Mercator) [Snyder, 1987]. Stworzone przez niego rozwiązanie przyczyniło się w znacznym stopniu do rozwoju nawigacji [Snyder i Voxland, 1989]. Funkcje odwzorowawcze odwzorowania sfery na płaszczyznę mają następującą postać [Pędzich, 2014]:

$$x' = R \cos(\phi_k) \ln \left(\tan \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) \right), \quad y' = R \cos(\phi_k) \lambda, \quad (3.31), (3.32)$$

gdzie:

x', y' – współrzędne ortogonalne płaskie,

R – promień sfery aproksymującej kształt Ziemi,

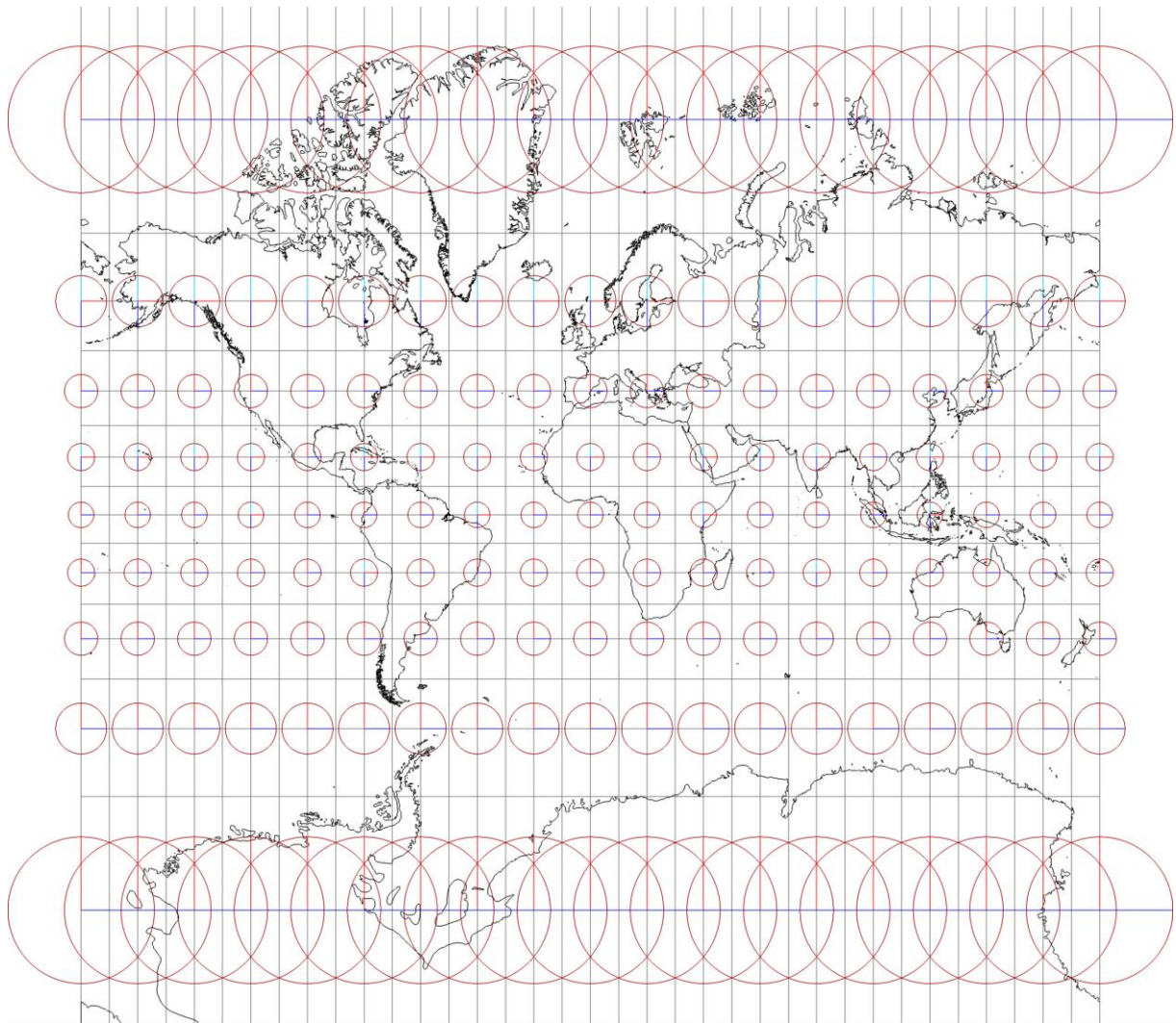
ϕ, λ – szerokość i długość geograficzna punktu,

ϕ_k – szerokość geograficzna dla której nie występują zniekształcenia odległości.

Z kolei jacobian odwzorowania oblicza się z formuły:

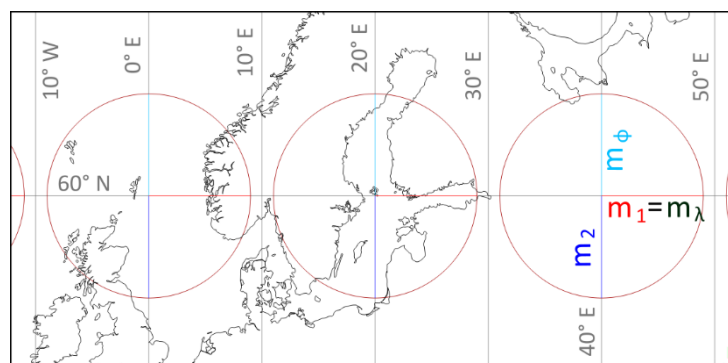
$$J = \begin{bmatrix} \frac{R}{\sin(45^\circ + \phi)} & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Obrazy południków i równoleżników tworzą układ odcinków linii prostopadłych (Rys. 3.9). O spełnionym warunku równokątności odwzorowania świadczą wskaźnice Tissota, które przyjmują postać okręgów i których zwiększający się w ramach zbliżania się do biegunów promień informuje o narastających zniekształceniach powierzchni. Odległości pomiędzy obrazami równoleżników są odwrotnie proporcjonalne do sinusa szerokości geograficznej [Snyder, 1987]. Współczynnik ϕ_k umożliwia konstruowanie odwzorowania cechującego się brakiem zniekształceń równoleżników o szerokości geograficznej równej przyjętej wartości kątowej. Bieguny odwzorowują się w nieskończoność, stąd obszar okołobiegunowy jest w różnym stopniu ograniczony i nie występuje



Rys. 3.9. Odzworowanie walcowe normalne równokątne Mercatora dla $\varphi_k = 0$.

na mapach [Pędzich, 2014]. Obszar Morza Bałtyckiego w odzworowaniu walcowym normalnym równokątnym Mercatora przedstawiono na **Rys. 3.10**.



Rys. 3.10. Wybrane wskaźnice Tissota w odzworowaniu walcowym normalnym równokątnym Mercatora obszaru Morza Bałtyckiego.

Powszechnym obszarem zastosowania odwzorowania Mercatora jest nawigacja [Snyder i Voxland, 1989]. Z racji prostoliniowego odwzorowania loksodrom na płaszczyźnie jest ono szczególnie przydatne w nanoszeniu i odczytywaniu kursu jednostek [Snyder, 1987].

3.3.5 Odwzorowanie pseudowalcowe równopolowe Sansona

Odwzorowanie zostało spopularyzowane przez Mikołaja Sansona w XVII w. Literatura nie przypisuje jemu jednoznacznie autorstwa. Jako jednego z potencjalnych autorów wymieniany jest również Mercator. Trzecią osobą utożsamianą z odwzorowaniem jest Jan Flamsteed, który wykorzystał formuły odwzorowawcze przy tworzeniu atlasu nieba w XVIII w. [Snyder, 1987]. Stąd też niekiedy odwzorowanie nazywane jest odwzorowaniem Sansona-Flamsteeda. Zobrazowanie konturów lądów oraz rozkład zniekształceń przedstawiono na **Rys. 3.11**. Realizacja odwzorowania sfery na płaszczyznę odbywa się na drodze następujących formuł funkcji odwzorowawczych [Pędzich, 2014]:

$$x' = R\phi, \quad y' = R\lambda \cos(\phi), \quad (3.34), (3.35)$$

gdzie:

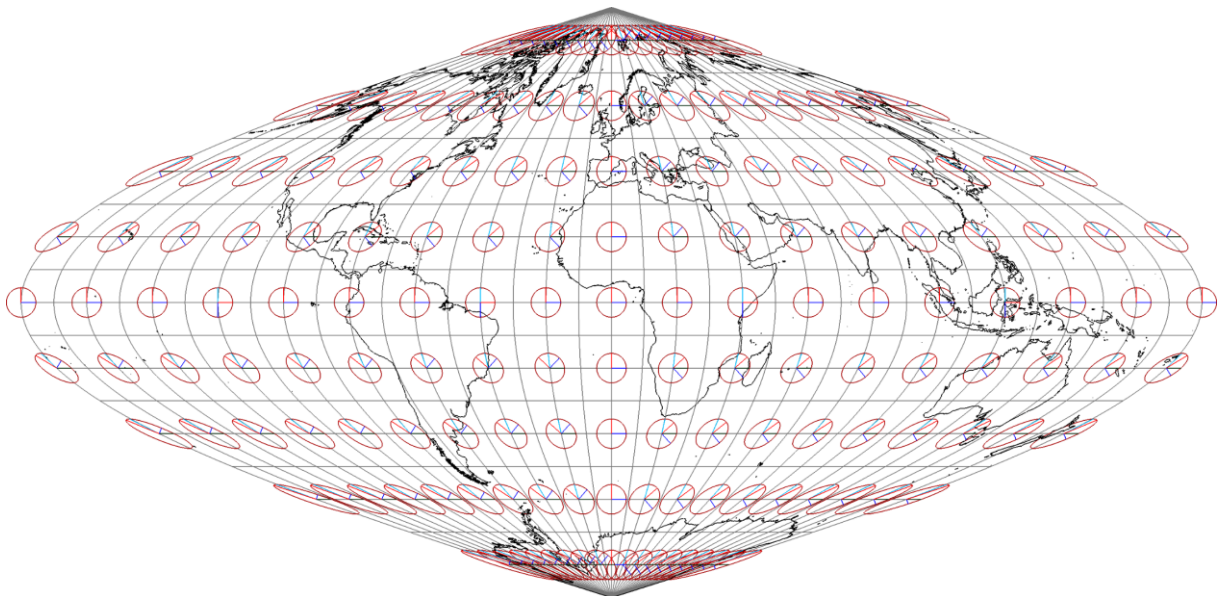
x', y' – współrzędne ortogonalne płaskie,

R – promień sfery aproksymującej kształt Ziemi,

ϕ, λ – szerokość i długość geograficzna punktu.

Jakobian odwzorowania ma następującą postać:

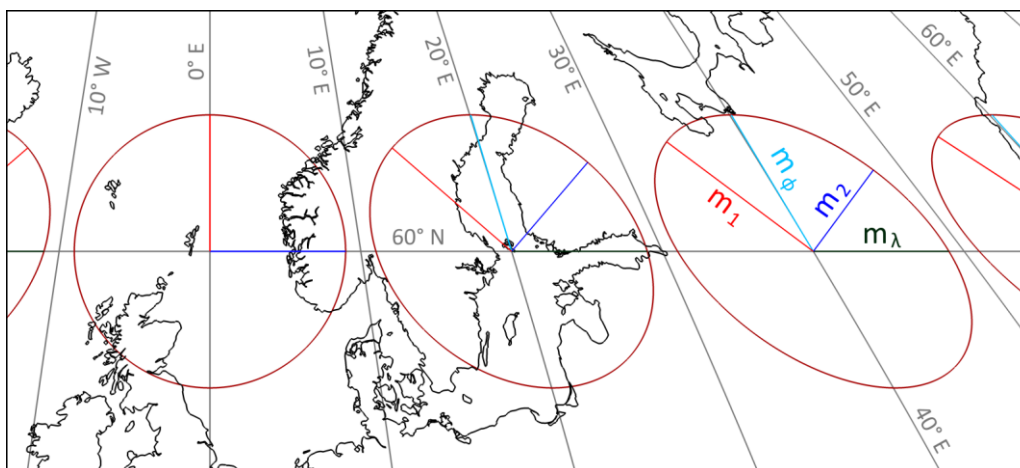
$$J = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -R \sin(\phi)\lambda & R \cos(\phi) \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$



Rys. 3.11. Odwzorowanie pseudowalcowe równopolowe Sansona.

Dwie linie parametryczne powierzchni oryginału (równik i południk początkowy) odwzorowują się w postaci wzajemnie ortogonalnych odcinków linii prostych. Jako jednakowo oddalone od siebie i równoległe względem obrazu równika odwzorowują się wszystkie równoleżniki [Snyder i Voxland,

1989]. Obrazem południków są krzywe odpowiadające sinusoidom, stąd często odwzorowanie otrzymuje dodatkowe określenie i nazywane jest odwzorowaniem sinusoidalnym [Snyder, 1987]. Skala długości m_λ w kierunku południków jest stała i równa jedności. Druga związana z nią skala długości (m_ϕ) spełnia warunek równopolewości odwzorowania ($p = 1$). Zależność można zaobserwować na zobrazowaniu obszaru Morza Bałtyckiego w postaci elips zniekształceń o jednakowych polach powierzchni (Rys. 3.12).



Rys. 3.12. Wybrane wskaźnice Tissota w odwzorowaniu pseudowalcowym równopolewym Sansona obszaru Morza Bałtyckiego.

Charakterystyczny kształt siatki obrazu linii parametrycznych często spotykany jest w atlasach geograficznych do przedstawiania rozmaitych zjawisk w skali globalnej. Niekiedy obszar opracowania jest zawężany do kontynentów [Pędzich, 2014]. Znane są również sekcyjne podziały powierzchni globu ziemskiego na kilka wycinków stycznych na linii obrazu równika [Snyder, 1987].

3.3.6 Odwzorowanie walcowe poprzeczne równoodległościowe Cassiniego-Soldnera

Niezależne autorstwo odwzorowania przypisuje się dwóm kartografom. Chronologicznie pierwszym z nich był żyjący w XVIII w. Cezary Franciszek Cassini de Thury. Kilkadziesiąt lat później podobne rozwiązanie przedstawił Jan von Soldner. Cechą odwzorowania jest brak zniekształceń liniowych na wybranym południku osiowym λ_0 oraz prostopadłość jednej ze skali długości w kierunkach głównych oraz jej jednostkowej wartości ($m_2 = 1$) (Rys. 3.13). Funkcje odwzorowawcze odwzorowania sfery na płaszczyznę mają następującą postać [Pędzich, 2014]:

$$x' = R \arctan\left(\frac{\tan(\phi)}{\cos(\lambda - \lambda_0)}\right), \quad y' = R \arcsin(\cos(\phi) \sin(\lambda - \lambda_0)), \quad (3.37), (3.38)$$

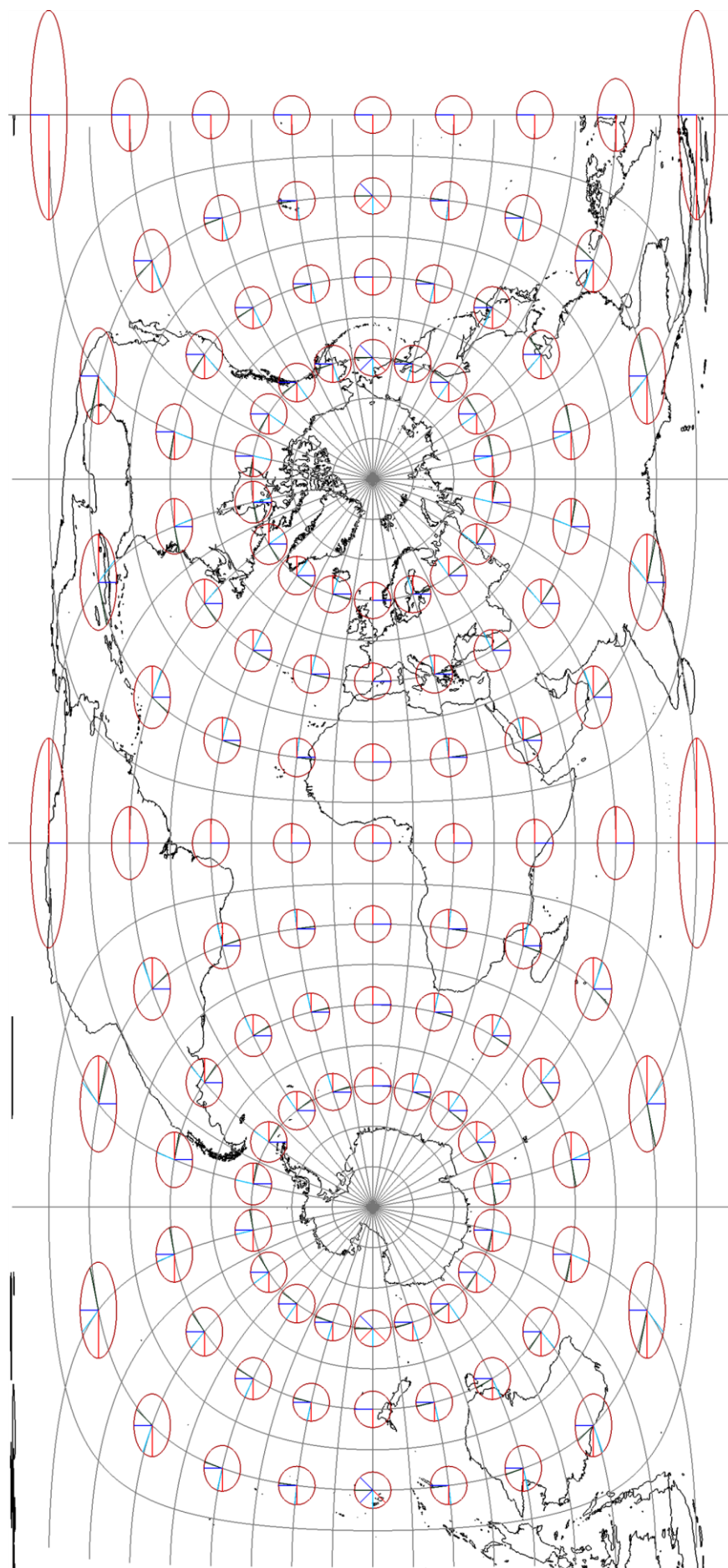
gdzie:

x', y' – współrzędne ortogonalne płaskie,

R – promień sfery aproksymującej kształt Ziemi,

ϕ, λ – szerokość i długość geograficzna punktu,

λ_0 – długość geograficzna środkowego południka odwzorowania.

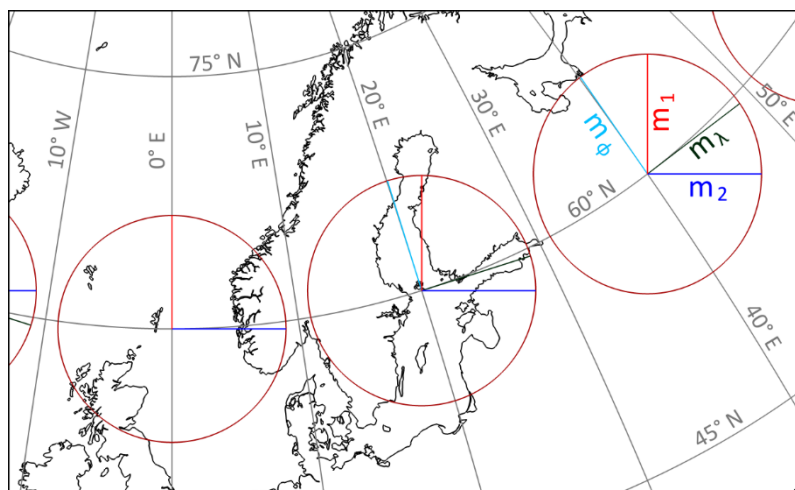


Rys. 3.13. Odwzorowanie walcowe poprzeczne równoodległościowe Cassiniego-Soldnera.

Jakobian obliczany jest według zależności:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{R(1 + \tan^2(\phi))}{\cos(\lambda - \lambda_0) \left(1 + \frac{\tan(\phi)}{\cos^2(\lambda - \lambda_0)} \right)} & \frac{R \tan(\phi) \sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos(\lambda - \lambda_0) \left(1 + \frac{\tan(\phi)}{\cos^2(\lambda - \lambda_0)} \right)} \\ \frac{-R \sin(\phi) \sin(\lambda - \lambda_0)}{\sqrt{1 - (\cos(\phi) \sin(\lambda - \lambda_0))^2}} & \frac{R \cos(\phi) \cos(\lambda - \lambda_0)}{\sqrt{1 - (\cos(\phi) \sin(\lambda - \lambda_0))^2}} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Odwzorowanie nie ma cech równopolewości ani równokątności [Snyder, 1987]. Właściwość jednostkowej skali długości widoczna jest na **Rys. 3.13** w postaci jednakowej szerokości wszystkich wskaźnic Tissota na całym obszarze opracowania. Ortogonalność obrazu południka osiowego oraz skali długości m_2 determinuje wertykalną orientację elips zniekształceń (**Rys. 3.14**). W miarę oddalania się od południka osiowego następuje stopniowe narastanie zniekształceń odwzorowawczych.



Rys. 3.14. Wybrane wskaźnice Tissota w odwzorowaniu walcowym poprzecznym równoodległościowym Cassiniego-Soldnera obszaru Morza Bałtyckiego.

Odwzorowanie Cassiniego-Soldnera było szeroko wykorzystywane do tworzenia map topograficznych Francji, Bawarii Brytyjskiego, Wielkiej Brytanii [Snyder, 1987], [Pędzich, 2014] ze szczególnym uwzględnieniem zamorskich posiadłości Imperium Brytyjskiego [Snyder i Voxland, 1989]. Ponadto, odwzorowanie znalazło zastosowanie w opracowaniach mapowych wielkoskalowych i geodezyjnych [Różycki, 1987].

3.4 Zastosowanie klasycznych odwzorowań kartograficznych w przestrzennych rozwinięciach chmur punktów

Odwzorowania kartograficzne dotyczą zobrazowania wypukłych powierzchni sfery lub elipsoidy obrotowej na płaszczyznę [Gajderowicz, 2009]. Tym samym, wykorzystanie ich klasycznej postaci w przestrzennych rozwinięciach chmur punktów jest zawężone do obiektów symetrycznych o takim kształcie. Należy podkreślić, że proponowane w rozprawie przestrzenne rozwinięcia wprowadzają trzeci wymiar przestrzeni, który nie był przedmiotem rozważań autorów poszczególnych odwzorowań kartograficznych. Tym samym, teoria odwzorowań kartograficznych znajduje zastosowanie głównie w horyzontalnym aspekcie przestrzennych rozwinięć chmur punktów. Aspekt wertykalny obejmuje tematykę określenia właściwej dla danego obiektu powierzchni pierwotnej oraz potraktowanie jej jako

powierzchni odniesienia do wyznaczenia wartości parametru głębokości poszczególnych punktów w chmurze. Zagadnienie to zostanie szczegółowo opisane w rozdziale 4. Metody doboru konkretnych formuł odwzorowawczych w istotny sposób wpływają na ostateczną postać przestrzennego rozwinięcia chmur punktów.

Dobór odpowiedniego odwzorowania wymaga analizy kształtu obiektu pomierzonego w technologii skaningu laserowego i wyrażonego w formie numerycznej chmury punktów. Zdarzają się bowiem przypadki, że powierzchnia badanego obiektu stanowi jedynie pewną część całkowitej powierzchni sfery bądź elipsoidy. Przykładowo, sklepienie sferyczne, stosując analogię do globu ziemskiego, obejmuje jedynie górną hemisferę. W innych przypadkach mogą występować nietypowe rozwiązania architektoniczne, które mają postać sferyczną lub eliptyczną i są umieszczone z boku konstrukcji (np. budynek Wydziału Nauk Społecznych Uniwersytetu Gdańskiego). Nawiązując do klasyfikacji odwzorowań kartograficznych, można przyjąć za celowe i uzasadnione odpowiednie dla danej konstrukcji ułożenie płaszczyzny obrazu. I tak dla sklepień, które z założenia mają charakter wertykalny, najodpowiedniejszym rozwiązaniem będzie odwzorowanie azymutalne normalne lub stożkowe normalne. W przypadku nietypowych obiektów, których punkty z chmury znajdują się głównie w dolnej i bocznej części sferycznej powierzchni, korzystniejsze będzie zastosowanie odwzorowania azymutalnego ukośnego bądź walcowego poprzecznego. Odrębnym aspektem są obiekty, które cechują się częściowym kształtem elipsoidalnym bądź sferycznym w kilku niesąsiadujących ze sobą bezpośrednio rejonach powierzchni. W takim należy rozważyć zastosowanie odwzorowania psuedowalcowego Gooda Homolosina [Snyder i Voxland, 1989], bądź innego odwzorowania cechującego się sektorowym podziałem powierzchni mapy.

Odrębną kwestią jest określenie charakteru zniekształceń odwzorowawczych, które występują w rozwiniętej chmurze punktów. Podobnie jak w ujęciu klasycznym, zakładany cel opracowania warunkuje założenie występowania własności równopolewości, równokątności bądź równoodległościowości. Jeżeli zatem celem przestrzennego rozwinięcia chmury punktów jest identyfikacja i wskazanie lokalizacji konkretnych zniekształceń na fizycznej powierzchni obiektu, to zasadnym jest przyjęcie odwzorowania równokątnego lub równoodległościowego, które zapewniają możliwość odniesienia miar liniowych i kątowych pomierzonych w rozwiniętej chmurze. Z kolei spełnienie warunku równopolewości umożliwia wnioskowanie o charakterze statystycznym odnośnie działania konkretnego procesu bądź zjawiska (np. występowania uwypukleń na skutek odkształcania się konstrukcji). Szczególne znaczenie w przestrzennych rozwinięciach mają wskaźnice Tissota, które informują o lokalnym horyzontalnym charakterze zniekształceń [Różycki, 1987]. W oparciu o znane długości półosi i orientację wskaźnic możliwe jest obliczenie właściwych dla danego punktu wartości skal długości i pól. Uzyskane wyniki stanowią istotne uzupełnienie do występujących lokalnie parametrów geometrycznych przestrzennego rozwinięcia chmury punktów takich jak np. parametr głębokości lub kierunek punktu w chmurze względem osi symetrii obiektu.

Teoria odwzorowań kartograficznych oraz będąca jej ogólniejszym ujęciem teoria odwzorowań powierzchni [Biernacki, 1949], stanowią punkt wyjścia przy opracowywaniu formuł przestrzennych rozwinięć chmur punktów obiektów symetrycznych o powierzchniach różnych od sferycznych czy eliptycznych. Stosunkowo dużą grupę obiektów, których chmury punktów można poddać przestrzennym rozwinięciom stanowią te, których kształt jest zbliżony do walca bądź hiperboloidy. Budowle wieżowe czy chłodnie kominowe posiadają swoje osie symetrii i, podobnie jak obiekty symetryczne sferyczne i eliptyczne, po przeprowadzeniu odpowiedniej parametryzacji punktów chmury, mogą zostać przedstawione w postaci przestrzennego rozwinięcia. Pomimo, że charakter zniekształceń tych odwzorowań różni się od poprzednich, to wybrane elementy teorii kartografii

matematycznej i odwzorowań powierzchni znajdują w nich swoje zastosowanie. Zważywszy na zróżnicowany charakter obiektów, poszczególne przypadki zostaną szczegółowo opisane w dedykowanych im rozdziałach.

4 Metody przetwarzania chmury punktów

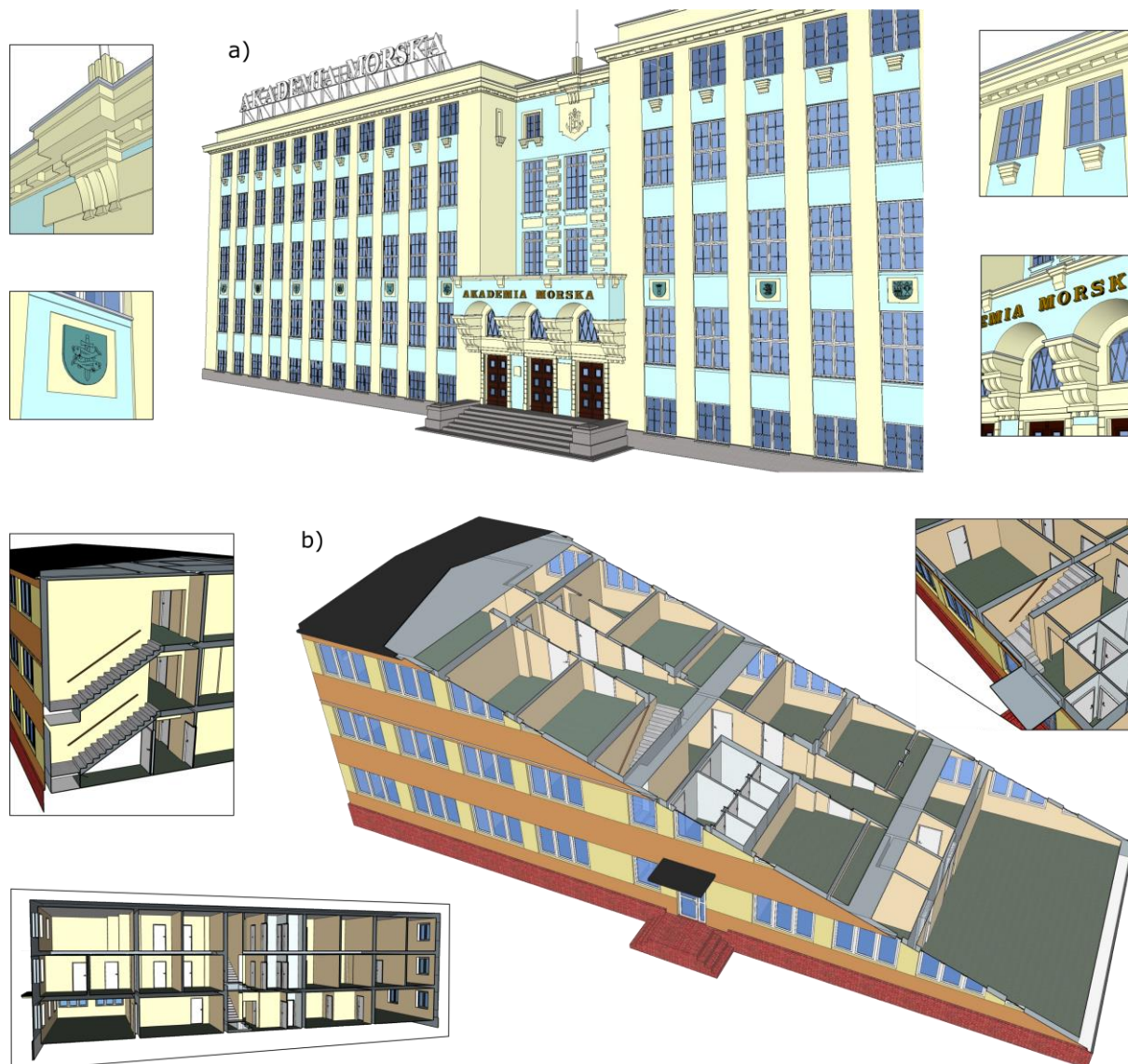
Chmury punktów stanowią wartościowe źródło informacji przestrzennych o otoczeniu. Do ich interpretacji i przetwarzania wykorzystywane są oprogramowania realizujące określone operacje numeryczne [Lach i in., 2016], [Ahokas i in., 2005], [Fernandez i in., 2007], [Varela-González i in., 2013], [Remondino, 2003]. Poza standardowym wyświetlaniem punktów w trójwymiarowej przestrzeni programu [Rusu i Cousins, 2011], większość dostępnych rozwiązań umożliwia wykonywanie podstawowych obliczeń geometrycznych takich jak pomiar odległości pomiędzy punktami czy wyznaczenie pola powierzchni wieloboku. Niektóre programy zostały dedykowane konkretnym dziedzinom i zostały wzbogacone o dodatkowe algorytmy usprawniające pozyskanie interesujących użytkownika danych, np. algorytmy obliczania objętości [Abbas i in., 2013] czy tworzenia modeli trójwymiarowych [Cignoni i in., 2008]. Innym popularnym obszarem zastosowania chmur punktów jest połączenie fotogrametrii i skaningu laserowego [Mechelke i in., 2007]. W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione wybrane istniejące sposoby przetwarzania danych oraz nowe rozwiązania realizujące przestrzenne rozwinięcia chmur punktów.

4.1 Obecne rozwiązania

Powstające w wyniku skanowania laserowego chmury punktów znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i gospodarki. W zależności od branży różne są oczekiwania dokładnościowe. Archeologia i renowacja zabytków kładzie nacisk na rozdzielczość chmury, dlatego też równie często stosowane są rozwiązania fotogrametryczne [Lerma i in., 2010]. Istotne zastosowanie znajdują tu skanery triangulacyjne, które kosztem niewielkiego zasięgu pomiaru zapewniają submilimetrowe rozdzielczości uzyskiwanych pomiarów [Levoy i in., 2000], [Santolaria i in., 2009]. Z kolei w modelowaniu trójwymiarowym obiektów o względnie regularnych kształtach geometrycznych, istotniejsze od liczby punktów na jednostkę powierzchni jest pomiar wszystkich głównych powierzchni obiektów [Hu i in., 2003]. Faktem wartym odnotowania jest brak powszechnie przyjętych standardów określających dokładność pomiaru skanerów co skutkuje pewną dowolnością w doborze kryteriów dokładnościowych w dokumentacji technicznej urządzeń [Boehler i in., 2003]. Istotnym zagadnieniem jest georeferencja wyników pomiarów, gdzie w przypadkach wymagających większych dokładności wykorzystuje się pozycjonowanie z użyciem klasycznych pomiarów geodezyjnych lub w oparciu o satelitarne techniki kinematyczne i statyczną [Landau i in., 2009], [Specht i in., 2017], [Specht i in., 2015]. W przeważającej części analiz przestrzennych wykorzystywane są niemodyfikowane chmury punktów (wyłączając operacje rejestracji i filtracji chmur punktów, które są obecnie standardem w ich numerycznym przetwarzaniu [Vosselman i Maas, 2010]). Uwzględniając znaczną szybkość pomiaru skanera, naturalną konsekwencją jest bardzo duży rozmiar chmury punktów (zbioru punktów pomierzonych). W związku z tym wyświetlanie i przetwarzanie danych niejednokrotnie jest utrudnione. W wielu przypadkach tak duża liczba punktów jest zbędna i zasadne jest przeprowadzenie odpowiedniej filtracji chmury punktów. W wyniku zastosowania filtrów o zdefiniowanych parametrach liczebności lub średniej gęstości wynikowego zbioru, uzyskuje się kilkukrotne zmniejszenie wielkości chmury punktów. Niemniej, nawet po przeprowadzeniu filtracji nadal pozostaje ona relatywnie dużym zbiorem danych określających geometrię pomierzonego obiektu. Rosnące zapotrzebowanie na sprawne i efektywne przetwarzanie chmur punktów przyczyniło się do stworzenia i rozwijania numerycznych bibliotek znajdujących zastosowanie nie tylko w dziedzinie pomiarów, ale również w robotyce [Rusu i Cousins, 2011].

W celu ograniczenia rozmiaru, usprawnienia prezentacji i wymiany danych w sposób manualny, półautomatyczny lub automatyczny konstruowane są modele pomierzonych obiektów [Deniziuk i in., 2014], [Specht in., 2016], [Pu i Vosselman, 2007], [Lee i in., 2013]. Dedykowane tym celom

oprogramowania wykorzystują algorytmy wpasowania powierzchni i brył [Tang i in., 2010] lub identyfikowania charakterystycznych konfiguracji punktów [Rutzinger i in., 2010]. Zaletą utworzonego modelu wektorowego jest geometryczna ciągłość i zdecydowane zmniejszenie rozmiaru danych. Przykład modeli trójwymiarowych skonstruowanych na podstawie chmur punktów przedstawiono na **Rys. 4.1**.



Rys. 4.1. Przykłady modeli trójwymiarowych budynków o różnej szczegółowości.

W zależności od tego czy pomiarem objęta była jedynie elewacja budynku czy również jego wnętrze, możliwe jest wykonanie modeli trójwymiarowych przestrzeni o różnym stopniu złożoności. **Rys. 4.1 b** przedstawia fragment przestrzeni modelu z widocznym układem pomieszczeń i kondygnacji budynku. Pozostała część modelu nie jest wyświetlana. Poprzedni model (**Rys. 4.1 a**) stanowi jedynie przedstawienie zewnętrznych ścian głównego budynku Uniwersytetu Morskiego w Gdyni. Kolejnym miejscem zastosowania modeli trójwymiarowych jest inżynieria odwrotna, której przedmiotem jest analityczne opisywanie kształtu istniejących obiektów. Znajdują tu zastosowanie triangulacyjne skanery laserowe oraz fotogrametria bliskiego zasięgu, które w przemyśle poprzez umożliwiają porównanie geometrii obiektu z jego nominalnym, projektowym kształtem. W pracach archeologicznych i konserwatorskich inżynieria odwrotna jest wykorzystywana do sporządzania

wysokodokładnych modeli trójwymiarowych i projektowanie nowych części, ściśle przystających do pozostałych elementów w obrębie istniejącego obiektu [Scopigno i in., 2011].

4.2 Pierwotne powierzchnie geometryczne obiektów symetrycznych

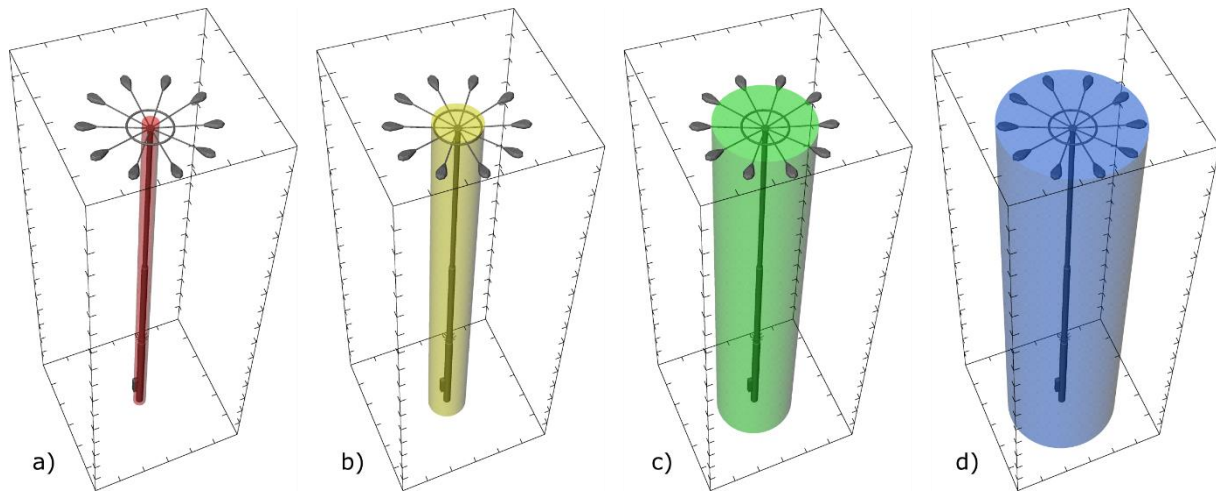
Cechą każdego obiektu symetrycznego jest obecność osi symetrii lub/i punktów symetrii [Bronshtein i in., 2015]. Pierwszy przypadek dotyczy m.in. konstrukcji o profilu walcowym lub stożkowym. Drugi z nich występuje w obiektach sferycznych. W świecie rzeczywistym występują zarówno obiekty o zasadniczo stałym przekroju poprzecznym, jak również obiekty wielomodułowe składające się z wielu pomniejszych elementów posiadające cechę symetrii. Przykładem pierwszych mogą być chłodnie kominowe lub kominy przemysłowe [Ledwoń i Golczyk, 1967], zaś drugich maszty telekomunikacyjne czy latarnie uliczne. W pierwszym przypadku identyfikacja osi symetrii nie jest utrudniona i może być przeprowadzona klasycznymi metodami geodezyjnymi [Anigacz, 2008], bądź z wykorzystaniem chmur punktów pochodzących ze skaningu laserowego. Drugi przypadek stawia dodatkowe zadanie w postaci konieczności analizy przynależności poszczególnych modułów dodatkowych do podstawowego elementu konstrukcyjnego. Może nim być np. podpora słupowa latarni lub podpora trójkątna wieży [Dabrowski i Specht, 2019].

W celu prawidłowego wyznaczenia osi symetrii obiektu w oparciu o chmurę punktów konieczne jest wyselekcjonowanie odpowiednich jej części i zastosowanie dostępnych w literaturze algorytmów. Jednym z rozwiązań jest utworzenie zestawu przekrojów poprzecznych chmury punktów oraz wyznaczenie ich punktów centralnych metodami ścisłego wyrównania obserwacji [Shakarji, 1998]. Duże zastosowanie w tym rozwiązaniu znajdują algorytmu estymacji odpornej, która niweluje wpływ obserwacji odstających na wynik estymacji [Tóvári i Pfeifer, 2005]. Kolejną fazą wyznaczania przebiegu osi jest wykorzystanie powstałego zbioru punktów na poszczególnych poziomach chmury do wyznaczenia parametrów geometrycznych linii [Snow i Schaffrin, 2016]. Wyznaczanie geometrycznych środków obiektów sferycznych jest zagadnieniem mniej złożonym numerycznie i wymaga zastosowania odpowiedniego algorytmu estymacji [Ahn i in., 2001]. Punkty środkowe sfery stanowią element symetrii obiektu sferycznego.

Poza wyznaczeniem osi bądź punktu symetrii odrębnym zagadnieniem jest określenie promienia podstawy walca lub sfery. Czynnikiem ten w istotny sposób wpływa na czytelność rozwinięcia chmury punktów, gdyż jest argumentem funkcji współrzędnych punktów tworzących powierzchnię sfery lub pobocznice walca. Przyjęcie zbyt małej długości promienia skutkuje nadmiernym nagromadzeniem się danych przestrzennych, co wiąże się z często nie rozwiązywalnymi trudnościami interpretacyjnymi [Dabrowski i Specht, 2019]. Korzystnym rozwiązaniem jest przyjmowanie długości promienia odpowiadającej strukturze chmury punktów. Jedną z przesłanek do właściwego doboru parametru może być obecność dużego stopnia nagromadzenia się punktów na powierzchni o określonym promieniu. W innych przypadkach lepszym rozwiązaniem jest przyjęcie długości promienia odpowiadającej maksymalnym odległościom punktów w chmurze od elementu symetrii (osi bądź punktu). Kwestia ta w większości przypadków zależy od struktury geometrycznej rozpatrywanego zbioru danych. Dla lepszego jej przedstawienia zostaną zaprezentowane rezultaty przestrzennego rozwinięcia chmury punktów latarni ulicznej na pobocznice walca.

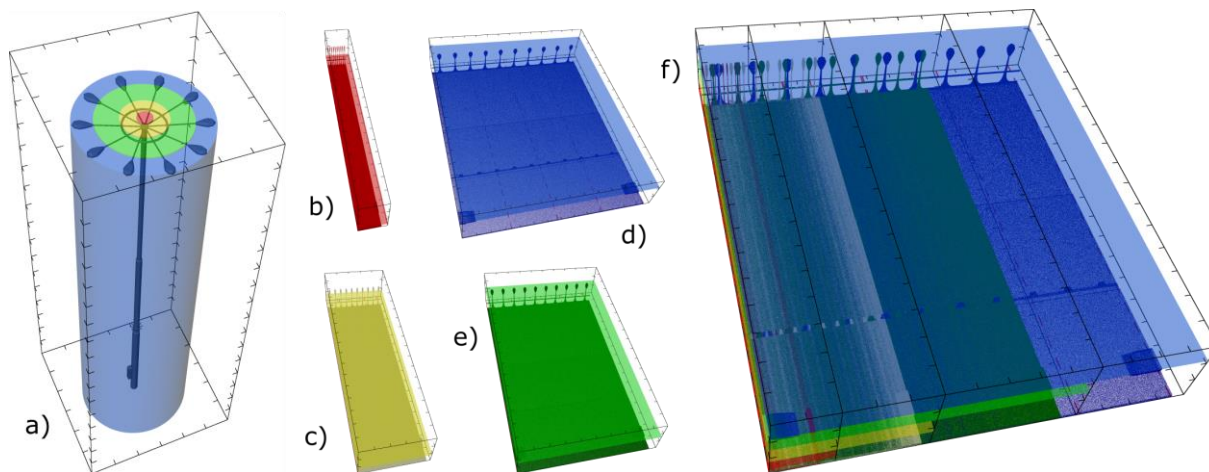
Promień walca jest parametrem, który w sposób decydujący wpływa na ostateczną postać przestrzennego rozwinięcia. Zgodnie z definicją, pole powierzchni bocznej (pobocznic) walca jest wprost proporcjonalne do długości promienia jego podstawy [Bronshtein i in., 2015]. Na podstawie uwarunkowań geometrycznych powierzchni obrazu (rozwięcia) można przyjąć na dowolnej odległości od osi symetrii obiektu. Z punktu widzenia konfiguracji przestrzennej, każde takie

przestrzenne rozwinięcie będzie prawidłowe, a wybór ten będzie wpływał na czytelność opracowania. Zbyt krótki promień spowoduje duże nagromadzenie się odwzorowanych punktów w stosunkowo wąskim fragmencie przestrzeni trójwymiarowej. Cztery różne warianty umieszczenia powierzchni bocznej walca zaprezentowano na **Rys. 4.2**.



Rys. 4.2. Cztery warianty umieszczenia w chmurze punktów latarni ulicznej powierzchni obrazu (pobocznicę walca) o promieniach wynoszących 0.25 m (a), 0.75 m (b), 1.50 m (c) i 2.15 m (d).

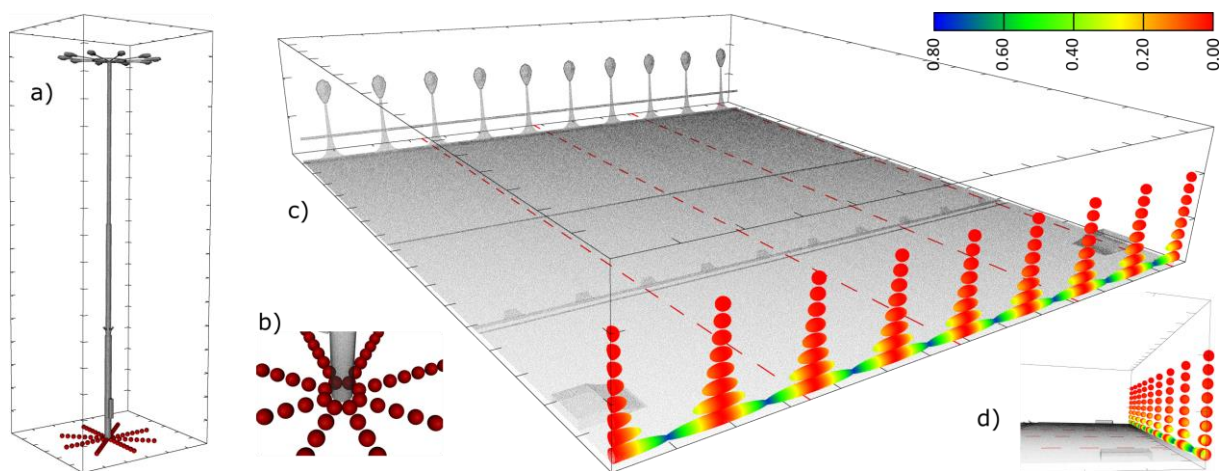
Przeważającym parametrem geometrycznym latarni ulicznej jest jej wysokość. Na szczycie podpory montowane są jedno lub kilka ramion z lampami odchodzące od podpory na odległość kilkunastu decymetrów. Z punktu widzenia jak najkorzystniejszego przedstawienia geometrii obiektu należy wybrać taką długość promienia, która nie wywoływałby nadmiernego zagęszczenia punktów. Cechą przestrzennego rozwinięcia jest brak zniekształceń na powierzchni pierwotnej (pobocznicę walca) oraz ich narastanie wraz z oddalaniem się od niej. Proces rozciągania chmury punktów narasta w kierunku osi symetrii obiektu, która ostatecznie odwzorowuje się jako płaszczyzna [Dabrowski i Specht, 2019]. Proces kurczenia odbywa się w kierunku przeciwnym do poprzedniego, tj. za pobocznice walca patrząc od strony jego osi symetrii. Przyjęcie krótkiego promienia wiąże się z przeważającą obecnością zniekształceń powodujących skurcz chmury punktów. Działanie takie najczęściej nie jest celowe, gdyż jedną z głównych korzyści płynących ze stosowania zaproponowanej metody jest uzyskanie alternatywnej formy prezentacji źródłowej chmury punktów zwiększającej czytelność opracowania. Formuły odwzorowawcze zostaną szczegółowo omówione w dalszej części rozdziału. Na tym etapie zostaną przedstawione jedynie wyniki procedury zastosowanej dla powierzchni pierwotnych o wybranych długościach promienia (**Rys. 4.3**).



Rys. 4.3. Wyniki przestrzennego rozwinięcia chmury punktów na pobocznicy walca przy różnych długościach promienia podstawy.

Na **Rys. 4.3 a** przedstawiono wszystkie rozpatrywane powierzchnie pierwotne rozwinięcia. Najkrótszy promień ($R = 0.25$ m), z racji swojego położenia w niewielkiej odległości od pionowej osi symetrii latarni, cechuje się brakiem zniekształceń odległości na pobocznicy walca o takim promieniu. Stopień skurczenia się chmury punktów jest bardzo duży, przez co wnioskowanie o strukturze geometrycznej chmury punktów jest bardzo utrudnione (**Rys. 4.3 b**). Czytelność opracowania zwiększa się wraz ze wzrostem długości promienia do $R = 0.75$ m (**Rys. 4.3 c**) i $R = 1.50$ m (**Rys. 4.3 e**). W drugim przypadku można zauważyć, że płaszczyzna obrazowa przecina ramiona latarni tuż przed miejscem umieszczenia na nich lamp (**Rys. 4.3 a**). Najlepsze możliwości interpretacyjne występują w ostatnim z przedstawionych przypadków, tj. $R = 2.15$ m (**Rys. 4.3 d**). Przyjęty tam promień odpowiada maksymalnym odległościom punktów w chmurze od pionowej osi konstrukcyjnej. Na rysunku można zaobserwować stopniowe rozciągnięcie chmury punktów w miarę zbliżania się do osi symetrii. W omawianym przykładzie stanowi to zaletę, gdyż w efekcie uzyskuje się obraz powierzchni podpory słupowej latarni na większym obszarze rozwinięcia.

Zebranie w jednym układzie współrzędnych wszystkich czterech rozpatrywanych przestrzennych rozwinięć pozwala na ich porównanie oraz sformułowanie wniosków (**Rys. 4.3 f**). Na rysunku można zauważyć korzystny wpływ przyjmowania większych długości promienia R . Działanie to przekłada się na wymiary rozwiniętej chmury w płaszczyźnie XY oraz na brak zniekształceń długości na wysokościach równych promieniowi R (barwne wycinki płaszczyzn w lewym dolnym rogu **Rys. 4.3 f**). Zakres współrzędnej X w odwzorowanych chmurach punktów przedstawiony jest poprzez umieszczenie kolejnych ramek z podziałką metrową dla każdego z przestrzennych rozwinięć. Na uwagę zasługuje fakt niezmienności wysokości punktów w uzyskanych chmurach, gdyż promień R wpływa jedynie na szerokość rozwinięcia i lokalizację powierzchni pozbawionej zniekształceń liniowych. Charakter pozostałych zniekształceń został zaprezentowany na **Rys. 4.4**, gdzie wykorzystano przestrzenne rozwinięcie na pobocznicy walca o promieniu $R = 2.15$ m. Dodatkowo, w przestrzeni trójwymiarowego układu współrzędnych wygenerowano na ośmiu kierunkach po osiem sfer. Analiza geometryczna ich obrazów po rozwinięciu ukazuje w dokładniejszy sposób charakter powstających w wyniku operacji odwzorowania zniekształceń.



Rys. 4.4. Zniekształcenia przestrzennego rozwinięcia chmury punktów na pobocznicy walca.

U podstawy latarni umieszczono symetrycznie w pełnym zakresie kąta poziomego osiem rzędów po osiem sfer każdy (**Rys. 4.4 a**). Sfery o promieniu 0.1 m zostały rozmieszczone w rzędach co 0.25 m, co daje 0.05 m prześwitu między kolejnymi bryłami. Pierwsze sfery, patrząc od strony osi symetrii, w niewielkim stopniu się przecinają (**Rys. 4.4 b**). Przyjęta promienista konfiguracja ma ukazać niezależność wielkości zniekształceń od kierunku poziomego w pierwotnej chmurze. Przestrzenne rozwinięcie pozwala ocenić rozkład poszczególnych komponentów funkcjonalnych latarni, takich jak szafka sterowniczej (rozciętej w rozwinięciu na dwie części), uchwytów na flagi oraz wieńczących podporę ramion latarni. Istotniejszy w tym ujęciu jest jednak sposób odwzorowania się sfer (**Rys. 4.4 c i d**). Na wysokości odpowiadającej promieniowi rozwinięcia R i równej 2.15 m nie występują zniekształcenia liniowe. Poruszając się w kierunku osi X w przestrzeni rozwiniętej chmury punktów, odległości są odmierzane niejako po zakrzywionej powierzchni pobocznicy walca. Zbliżając się do osi rozwinięcia można zaobserwować proces rozciągania chmury punktów, co jest szczególnie widoczne w przypadku powierzchni sfer, które zostały umieszczone najbliżej osi latarni. Na ich przykładzie ukazany został wzrost zniekształceń w najbliższym otoczeniu osi rozwinięcia. Dołączona do rysunku legenda pozwala na odczytanie konkretnych wartości zniekształceń dla poszczególnych punktów położonych na powierzchni sfer.

Obserwowane zniekształcenia stanowią cechę przestrzennego rozwinięcia chmury punktów na pobocznicy walca, a nie jego wadę. Podobnie jak klasyczne kartograficzne funkcje odwzorowawcze, które są pewnym kompromisem służącym realizacji założonego celu (np. możliwości odczytywania azymutu z mapy z zastosowanym odwzorowaniem Mercatora). Podobnie w tym przypadku, charakterystyka przedstawionych zniekształceń przestrzennych pozwala na uzyskanie rozciągniętego obrazu fragmentu chmury punktów znajdującego się blisko osi rozwinięcia. Jest to szczególnie korzystne w przypadku obiektów o wąskim profilu, gdyż z dużym stopniem powiększenia można zaobserwować poszczególne jego komponenty. Drugą cechą przestrzennego rozwinięcia jest zachowanie kątów kierunkowych pozwalające na ich identyfikację w zmodyfikowanej, rozwiniętej strukturze (czerwone przerywane linie na **Rys. 4.4 c**). Zasada ta funkcjonuje niezależnie od przyjętego promienia podstawy walca, którego długość może być przyjmowana w zależności od geometrii rozpatrywanego obiektu symetrycznego. Inna bowiem będzie jego długość w przypadku zwartej bryły budowli wieżowej z nielicznymi wypustami, a inna w przypadku masztu telekomunikacyjnego. W drugim przypadku istotniejsze jest zobrazowanie odchodzących od podpory ramion i podpór, podczas gdy w pierwszym będzie to ściana budowli. Kwestia doboru długości promienia jest w dużym stopniu zależna od rozpatrywanego obiektu. Uniwersalną przesłanką wydaje się być jednak zawsze

rozkład rozdzielnosci punktów w chmurze. Im więcej punktów znajduje się w danej odległości od osi symetrii obiektu, tym bardziej wskazane jest przyjęcie tej odległości za długość promienia walca. Zapewnia się tym samym minimalizację zniekształceń dla większej części punktów w chmurze. Analogiczne rozważania można przeprowadzać dla innych rodzajów przestrzennych rozwinięć chmur punktów. Jednakże, dla utrzymania rozprawy w zwartej postaci, korzystniejszym rozwiązaniem jest rozważanie konkretnych przykładów, które zostaną przedstawione w dalszych podrozdziałach.

4.3 Przestrzenne rozwinięcia chmur punktów walcowych obiektów symetrycznych

Wykonanie przestrzennego rozwinięcia chmury punktów obiektu symetrycznego o powierzchni podstawowej będącej pobocznicą walca wymaga określenia położenia pionowej osi symetrii (osi konstrukcyjnej) oraz promienia podstawy walca. W idealnych warunkach geometrycznych do przeprowadzenia obliczeń wystarczyłoby wskazanie współrzędnych horyzontalnych x i y punktu leżącego na pionowej osi obiektu u jego podstawy. W rzeczywistości, z rozmaitych przyczyn konstrukcyjnych lub wpływu czynników środowiskowych, oś konstrukcyjna obiektów wysmukłych zazwyczaj nie jest idealnie pionowa. Dlatego przestrzenne rozwinięcia uzyskiwane poprzez założenie pionowego przebiegu osi będzie obarczone zniekształceniami geometrycznymi uzależnionymi od stopnia odchylenia faktycznej osi konstrukcyjnej od pionu, które będą zafałszowywały prawdziwy kształt obiektu. W celu wyeliminowania tego czynnika należy chmurę punktów poddać transformacji określanej w niniejszej pracy terminem pionizacja. Etapem wstępnym jest wyznaczenie parametrów analitycznych równania rzeczywistej osi symetrii obiektu.

W skład chmur punktów obiektów symetrycznych najczęściej nie wchodzi punkty bezpośrednio wskazujące przebieg ich osi. Spowodowane jest to faktem, iż metoda pomiarowa umożliwia wyznaczenie współrzędnych punktów położonych jedynie na powierzchni obiektów. Ograniczenie to jest kompensowane przez bardzo liczny zbiór pomierzonych punktów, które mogą następnie zostać poddane stosownej analizie numerycznej. Geodezyjne metody wyrównania obserwacji umożliwiają wyznaczanie współrzędnych punktów stanowiących środki geometryczne i środki ciężkości przekrojów chmury punktów. Generując zatem odpowiednio liczny zbiór przekrojów poprzecznych chmury, możliwa jest wiarygodna estymacja przebiegu osi konstrukcyjnej obiektu walcowego, która najczęściej nie jest idealnie pionowa. Na bazie przekrojów wyznaczana jest dyskretna (punktowa) reprezentacja osi, która następnie za pomocą m.in. metody najmniejszych kwadratów umożliwia wyznaczenie wartości estymatorów parametrów geometrycznych osi.

Na podstawie parametrów równania osi oraz współrzędnych punktu środkowego podstawy realizowana jest procedura doprowadzenia osi, a wraz z nią całej chmury punktów, do warunku pionowości. Proces polega na realizacji sekwencji elementarnych rotacji wokół wybranych osi układu współrzędnych chmury punktów. Wartości kątów rotacji wyznaczane są z równania pochyłej osi konstrukcyjnej. Przedstawione czynności wstępne są konieczne dla uzyskania przestrzennego rozwinięcia zdefiniowanego przez funkcje odwzorowujące pierwotną chmurę punktów walcowego obiektu symetrycznego.

4.3.1 Oś konstrukcyjna walcowych obiektów symetrycznych

Oś walca ma postać odcinka wyznaczonego przez środki jego podstaw. Zakładając pionowe ułożenie walca, każdy punkt położony na pobocznicy w danej płaszczyźnie horyzontalnej jest jednakowo oddalony od punktu na osi. Wykorzystując tę właściwość oś konstrukcyjna walca zostaje przyjęta jako oś przestrzennego rozwinięcia chmury punktów. Skaner laserowy pozyskuje jedynie dane geometryczne dotyczące powierzchni obiektu. Przez to najczęściej nie jest możliwe wskazanie przebiegu osi na podstawie pomierzonych punktów w chmurze. Stąd też wyznaczenie położenia osi

musi odbyć się w sposób pośredni. W celu wskazania faktycznego przebiegu osi, celowym jest wskazanie większej liczby punktów położonych na osi na różnych wysokościach konstrukcji. Realizowane jest to poprzez wydzielenie szeregu wąskich przekrojów chmury punktów z zadanyim interwałem wysokości, w obrębie których następuje wyznaczenia położenia punktów centralnych figur przekrojów. Dzięki temu uzyskuje się zbiór punktów reprezentujących przebieg osi w pełnym zakresie wysokości obiektu.

Procedura wskazania parametrów geometrycznych osi konstrukcyjnej zostanie przedstawiona na przykładzie latarni ulicznej z podporą o profilu walca o zmiennym promieniu. Po wyselekcjonowaniu z chmury punktów latarni horyzontalnych przekrojów o interwale 1 m, możliwe było wyznaczenie długości promieni okręgów oraz współrzędnych horyzontalnych ich środków. Do wyznaczenia wartości tych parametrów, z racji dużej liczby obserwacji nadliczbowych, wskazane jest wykorzystanie metody najmniejszych kwadratów (MNK) lub odpornych metod estymacji [Wiśniewski, 2013], [Baran, 1999], [Huber, 1964], [Hampel i in., 2011]. Punktem wyjściowym rozważań jest równanie kanoniczne opisujące zależność punktu środkowego okręgu, promienia oraz rozpatrywanego punktu:

$$(x_c - x_i)^2 + (y_c - y_i)^2 = R^2, \quad (4.1)$$

gdzie x_c, y_c oznaczają współrzędne środka, R promień, a x_i, y_i współrzędne punktu na okręgu.

Formułując powyższe równanie dla każdego z punktów wchodzących w skład danego przekroju uzyskuje się n równań z trzema niewiadomymi: x_c, y_c i R . Po rozwinięciu wzorów skróconego mnożenia i uporządkowaniu wyrazów uzyskuje się następującą postać równania:

$$x_c^2 - 2x_c x_i + y_c^2 - 2y_c y_i - R^2 = -(x_i^2 + y_i^2), \quad (4.2)$$

a po wprowadzeniu dodatkowych zmiennych ζ_1, ζ_2 i ζ_3 będących funkcjami parametrów x_c, y_c i R [Janowski, 2018]:

$$\zeta_1 x_i + \zeta_2 y_i + \zeta_3 = -(x_i^2 + y_i^2), \quad (4.3)$$

gdzie $\zeta_1 = -2x_c, \zeta_2 = -2y_c, \zeta_3 = x_c^2 + y_c^2 - R^2$.

Model funkcjonalny realizujący funkcję celu metody najmniejszych kwadratów posiada następującą postać [Baran, 1999]:

$$\mathbf{AX} + \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Po obliczeniu pochodnych cząstkowych równania po zmiennych ζ_1, ζ_2 i ζ_3 uzyskuje się macierz współczynników \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_i & y_i & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Wektor estymatorów parametrów \mathbf{X} oraz macierz wyrazów wolnych \mathbf{y} posiadają następującą postać:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -(x_1^2 + y_1^2) \\ -(x_2^2 + y_2^2) \\ \dots \\ -(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}. \quad (4.6), (4.7)$$

Rozwiązanie równania macierzowego metodą najmniejszych kwadratów jest uzyskiwane poprzez formułę [Baran, 1999], [Wiśniewski, 2009]:

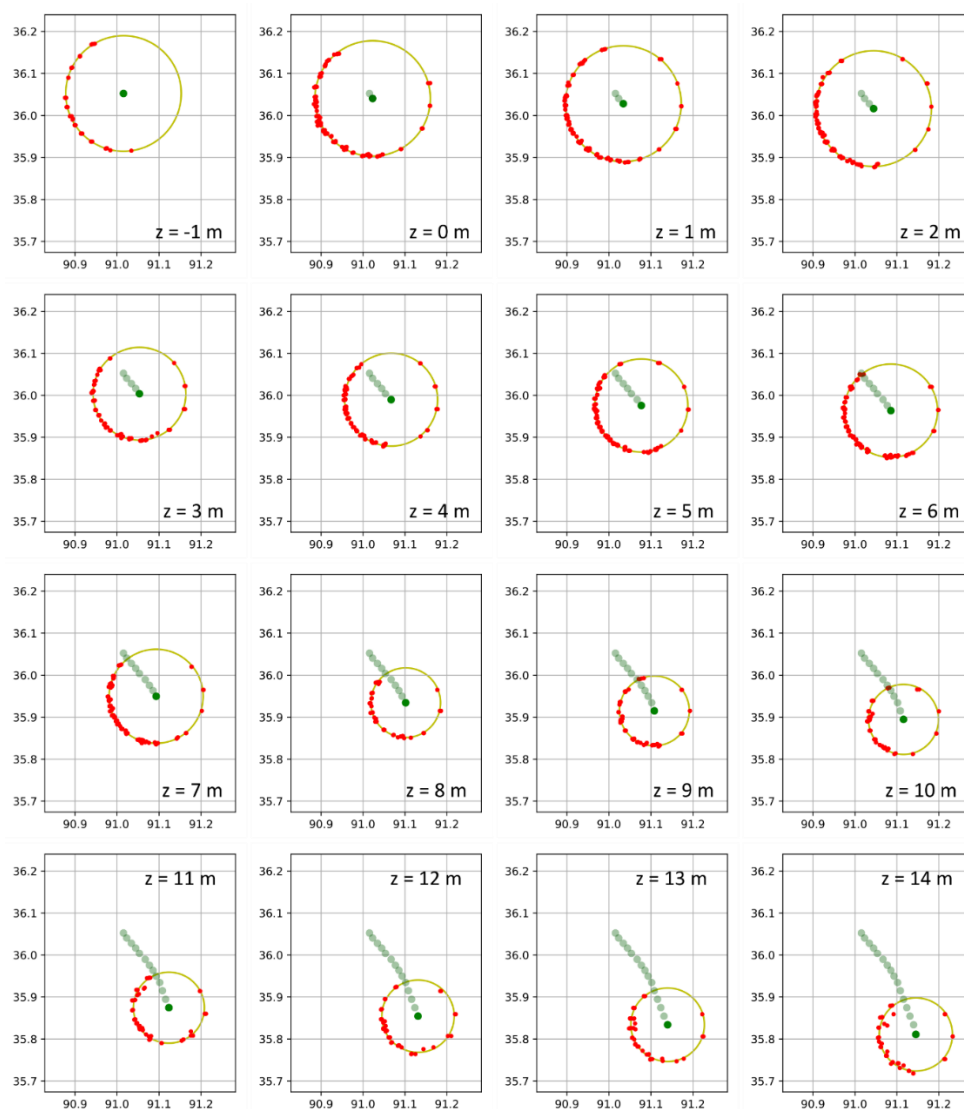
$$\mathbf{X} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y}), \quad (4.8)$$

gdzie P oznacza macierz wag o jednostkowych wagach (istotność każdej obserwacji jest jednakowa).

W kolejnym kroku z zależności (4.3) wyznaczane są wartości współrzędnych horyzontalnych środka okręgu x_c, y_c oraz długość promienia R . Przedstawioną sekwencję obliczeniową przeprowadza się na zbiorze punktów każdego z przekrojów chmury punktów podpory latarni. W efekcie uzyskuje się informację dotyczącą położenia osi konstrukcyjnej obiektu na różnych wysokościach. Uzyskane wyniki przedstawiono na **Rys. 4.5**. Do osiągnięcia założonego celu można również wykorzystać inne algorytmy obecne w literaturze przedmiotu, np. [Chernov i Lesort, 2005] czy [Gander i in., 1994].

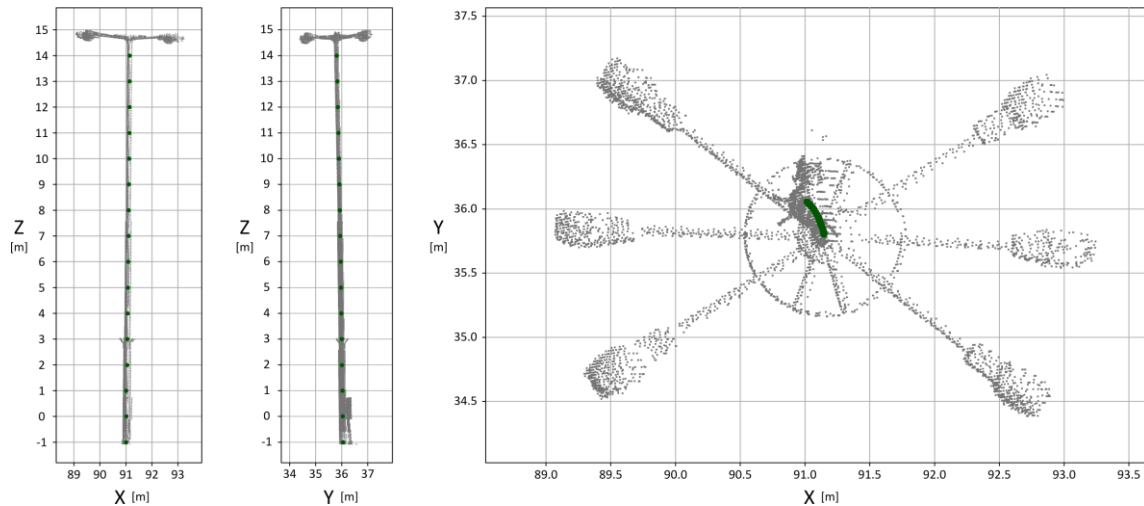
Położenie środków okręgów wyznaczonych metodą najmniejszych kwadratów w zbiorach punktów wycinków chmury przedstawiono kolorem zielonym. Poczynając od najniższego wycinka (współrzędna wertykalna $z = -1$ m) i przechodząc na wyższe poziomy uzyskano wskazanie rzeczywistego przebiegu osi konstrukcyjnej podpory latarni. Na kolejnych poziomach przedstawiono jaśniejszym odcieniem koloru zielonego poprzednio wyznaczone środki okręgów. Na ilustracji widoczny jest pochyły przebieg osi konstrukcyjnej podpory latarni. W dalszych etapach pracy fakt ten będzie istotny z punktu widzenia prawidłowości przeprowadzonego przestrzennego rozwinięcia chmury punktów. Położenia poszczególnych punktów osi wraz z chmurą punktów latarni przedstawiono na **Rys. 4.6**.

Pochylenie latarni jest szczególnie widoczne w rzucie ortogonalnym bocznym prezentującym płaszczyznę YZ . Użycie przekrojów z interwałem 1 m umożliwia dokładne wskazanie położenia osi konstrukcyjnej podpory latarni. Biorąc pod uwagę najniżej i najwyżej położone punkty na osi określono bezwzględną i względną wartość wychylenia wynoszące w tym przypadku odpowiednio 0.274 m i 1.83 %. Wpływ nieuwzględnienia pochyłości osi konstrukcyjnej obiektu na przestrzenne rozwinięcie chmury punktów zostanie przedstawione w rozdziale 4.3.4.



Rys. 4.5. Wyznaczenie przebiegu osi na podstawie horyzontalnych wycinków chmur punktów.

Określenie przebiegu osi konstrukcyjnej obiektu nie w każdym przypadku może być przeprowadzone na drodze wpisania w wycinki chmury punktów okręgów i wyznaczenie ich środków. Występują bowiem konstrukcje o cechach geometrycznych umożliwiającym zastosowanie metody określania punktów osi na kolejnych poziomach przekrojów przez chmurę, lecz posiadających istotne różnice w kształcie profilu poprzecznego. Przykładowo wieża telekomunikacyjna na szczycie podpory posiada podesty z konstrukcjami podantenowymi z aparaturą transmisyjną zwróconą w różnych kierunkach. Układ montażowy z zainstalowanymi antenami i urządzeniami pomocniczymi otacza zwieńczenie podpory, przez co możliwe jest zastosowanie przestrzennych rozwinięć do przedstawienia całości infrastruktury w pojedynczym opracowaniu. Wyznaczenie przebiegu osi konstrukcyjnej odbywa się w pełnym zakresie wysokości podpory wieży, które stanowią układ belek stalowych tworzących strukturę ściętego ostrosłupa o podstawie trójkąta bądź kwadratu. Stosując metodę generowania przekrojów uzyskuje się zbiory punktów wskazujące położenie głównych dźwigarów konstrukcji oraz innych elementów konstrukcyjnych wieży na kolejnych poziomach wysokości. Poniżej zostanie zaprezentowany sposób wyznaczania punktów osi dla podpory trójkątnej.



Rys. 4.6. Przebieg osi konstrukcyjnej latarni ulicznej na kolejnych poziomach odniesienia w trzech rzutach ortogonalnych.

Położenie osi symetrii na wysokości konkretnego przekroju pokrywa się z geometrycznym środkiem ciężkości trójkąta, który wyznaczony jest przez przecięcie się jego środkowych. Środkowe trójkąta powstają poprzez połączenie każdego z wierzchołków ze środkowym punktem naprzeciwległego boku trójkąta i obliczane są za pomocą algorytmów przedstawionych w literaturze [Lester, 1997], [Coxeter, 1995], [Kimberling, 1993]. Z uwagi na wyznaczanie położenia punktów osi na podstawie wąskich przekrojów utworzonych w zadanym interwale wysokości można tę współrzędną przyjąć jako współrzędną wysokościową środka ciężkości trójkąta (z_{centr}). Współrzędne horizontalne wierzchołków **A**, **B** i **C** trójkąta odczytuje się z dużą dokładnością z przekroju poprzecznego w lokalnym układzie współrzędnych chmury punktów:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Następnie na podstawie znanych współrzędnych wierzchołków wyznacza się współrzędne wektorów poszczególnych boków trójkąta:

$$\vec{\mathbf{AB}} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{AC}} = \begin{bmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{bmatrix}, \vec{\mathbf{BC}} = \begin{bmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Wektory jednostkowe właściwe dla trzech boków wyznacza się na podstawie następujących formuł:

$$\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{AB}} = \frac{\vec{\mathbf{AB}}}{|\vec{\mathbf{AB}}|}, \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{AC}} = \frac{\vec{\mathbf{AC}}}{|\vec{\mathbf{AC}}|}, \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{BC}} = \frac{\vec{\mathbf{BC}}}{|\vec{\mathbf{BC}}|}. \quad (4.11)$$

Korzystając z własności geometrycznych wektorów jednostkowych w trójkącie możliwe jest wyznaczenie współrzędnych środka ciężkości. Macierz współczynników **M** po zdefiniowaniu symetrycznych wektorów wypadkowych wierzchołków $\vec{\mathbf{v}}_{\text{sym A}} = \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{AB}} + \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{AC}}$ i $\vec{\mathbf{v}}_{\text{sym B}} = \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{BC}} - \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{AB}}$ oraz stworzeniu z nich układu liniowego, posiada następującą postać macierzową:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{v}}_{\text{sym A}} & -\vec{\mathbf{v}}_{\text{sym B}} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

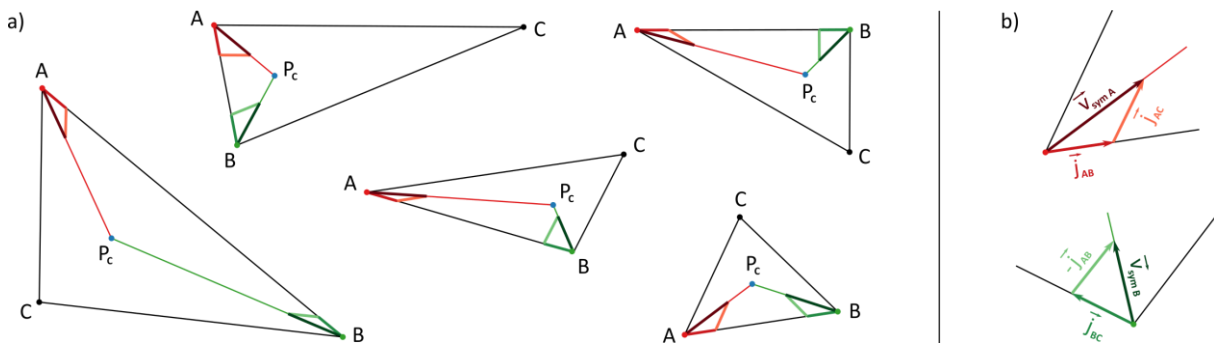
Rozwiązaniem układu liniowego jest wektor współczynników skali c_A i c_B wektorów wypadkowych $\vec{\mathbf{v}}_{\text{sym A}}$ i $\vec{\mathbf{v}}_{\text{sym B}}$, których przecięcie wyznacza środek ciężkości trójkąta:

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1} \vec{\mathbf{A}} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_A \\ c_B \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Współrzędne środka ciężkości trójkąta wyznaczone są ostatecznie za pomocą formuł:

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{A} + c_A \vec{\mathbf{v}}_{\text{sym A}} = \mathbf{B} + c_B \vec{\mathbf{v}}_{\text{sym B}} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Sekwencję działań na wektorach przedstawiono na **Rys. 4.7**.



Rys. 4.7. Wyznaczanie środka ciężkości na przykładzie wybranych trójkątów (a) oraz szczegółowe przedstawienie układu wektorów jednostkowych i symetralnych w wierzchołkach (b).

Przedstawiony algorytm realizuje wyznaczenie środka ciężkości \mathbf{P}_c w oparciu o wektory jednostkowe boków trójkąta. Różne odcienie koloru czerwonego i zielonego przedstawiają wektory właściwe dla wymienionych wierzchołków (\mathbf{A} – czerwone, \mathbf{B} – zielone). Linie łączące wierzchołki ze środkiem ciężkości to środkowe trójkąta (**Rys. 4.7 a**). Układ wektorów przedstawia wektory jednostkowe współliniowe z poszczególnymi bokami trójkąta ($\vec{\mathbf{j}}_{AB}$, $\vec{\mathbf{j}}_{AC}$, $\vec{\mathbf{j}}_{BC}$) oraz wypadkowe wektory symetralne kątów wierzchołkowych ($\vec{\mathbf{v}}_{\text{sym A}}$ i $\vec{\mathbf{v}}_{\text{sym B}}$) wyznaczające kierunki środkowych trójkąta (**Rys. 4.7 b**).

Po wyznaczeniu środków ciężkości na podstawie horyzontalnych przekrojów powstaje zbiór punktów wskazujący przebieg osi konstrukcyjnej podpory wieży. Wyznaczona oś będzie pełniła rolę osi przestrzennego rozwinięcia chmury punktów. Określenie parametrów liczbowych osi następuje w drodze analizy współrzędnych wektorów wskazujących przebieg osi pomiędzy podstawą podpory punktom osi wyznaczonym na przekrojach poprzecznych. Przyjmując metodę wektorową należy obliczyć współrzędne trójwymiarowe poszczególnych wektorów mających swój początek w środku ciężkości najniższego z rozpatrywanych trójkątów. Kolejnym krokiem jest sprowadzenie wszystkich

wektorów do postaci jednostkowej i obliczenie metodą średniej ważonej wektora średniego wskazującego kierunek rzeczywistej osi konstrukcji.

Współrzędne wierzchołków trójkątów (**A**, **B**, **C**) na poszczególnych poziomach chmury punktów cechują się stałą wartością współrzędnej wysokościowej właściwej dla danego przekroju. Za pomocą algorytmu (4.9) – (4.14) oblicza się współrzędne środka ciężkości P_C każdego z trójkątów. Następnie dla każdego wycinka chmury punktów wyznaczone zostają współrzędne wektorów \vec{v}_i utworzonych pomiędzy środkiem ciężkości trójkąta na najniższym przekroju i środkiem ciężkości na rozpatrywanym poziomie. Z racji przyjętego interwału zmiany wysokości współrzędna z oraz długość wektora zwiększają się w miarę zbliżania się do szczytu podpory wieży. Każdy z wyznaczonych wektorów wskazuje kierunek osi konstrukcyjnej właściwy dla rozpatrywanego przekroju poprzecznego chmury punktów. Wyznaczenie wektora wypadkowego w oparciu o wszystkie przyjęte poziomy wymaga doprowadzenia wektorów \vec{v}_i do postaci jednostkowej \vec{j}_i . W tym celu wyznacza się długość każdego z wektorów i dzieli przez nią każdą z jego współrzędnych. W efekcie uzyskuje się zbiór wektorów o liczebności odpowiadającej liczbie wycinków pomniejszonej o jeden i o długości równej 1 metr. Wraz ze wzrostem wysokości wyznaczone wektory cechują się większą wiarygodnością we wskazywaniu przebiegu osi konstrukcyjnej. Dlatego też przyporządkowuje się każdemu z nich odpowiednią wagę w_i . Za kryterium wagowania przyjmuje się wartość różnicy współrzędnych wysokościowych z_i i z_0 rozpatrywanego oraz najniższego przekroju poprzecznego chmury. Wyznaczenie wektora wypadkowego określającego przebieg osi konstrukcyjnej podpory trójkątnej wieży telekomunikacyjnej realizowane jest za pomocą formuły:

$$\vec{v}_{\text{wyp}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\vec{v}_i \cdot w_i}{|\vec{v}_i|}}{\sum_{i=1}^n w_i}, \text{ gdzie } w_i = z_i - z_0. \quad (4.15)$$

Kolejnym etapem procedury jest wyznaczenie analitycznej postaci prostej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, która posiadałaby cechę współliniowości z wektorem wypadkowym. Z definicji osi konstrukcji dana jest wektorowym równaniem parametrycznym prostej o następującej postaci [Hazewinkel, 2013]:

$$\mathbf{P}_{\text{os}}(t) = \vec{P}_{\text{c0}} + t \cdot \vec{v}_{\text{wyp}}. \quad (4.16)$$

Prosta wyznaczająca oś konstrukcyjną obiektu \mathbf{P}_{os} jest funkcją wektorów \vec{P}_{c0} i \vec{v}_{wyp} oraz parametru t . Pierwszy z wymienionych wektorów wyznacza położenie środka ciężkości najniższego przekroju w lokalnym układzie współrzędnych chmury punktów. Parametr t decyduje o położeniu punktu na prostej względem punktu początkowego wyznaczonego przez wektor \vec{P}_{c0} . Z formuły (4.16) wynika, iż dla $t = 1$ uzyskany zostanie punkt na linii przesunięty o wektor \vec{v}_{wyp} (oddalony od punktu początkowego o długość wektora wypadkowego). Uzyskanie współrzędnych dowolnego innego punktu na prostej wymaga wyznaczenia takiej wartości t , która spowoduje odpowiednie przeskalowanie wektora i wskazanie położenia punktu na prostej.

4.3.2 Pionizacja chmur punktów pochyłych walcowych obiektów symetrycznych

Wykonanie prawidłowego przestrzennego rozwinięcia chmury punktów wymaga określenia położenia pionowej osi rozwinięcia. W przypadku spełniania przez obiekt powyższych idealnych warunków geometrycznych, do przeprowadzenia obliczeń wystarczyłoby wskazanie współrzędnych horyzontalnych x i y punktu leżącego na pionowej osi u podstawy obiektu. W rzeczywistości, z rozmaitych przyczyn konstrukcyjnych lub wpływu czynników środowiskowych, oś konstrukcyjna obiektów wysmukłych zazwyczaj nie jest pionowa. Dlatego przestrzenne rozwinięcie uzyskane poprzez zdefiniowanie jedynie punktu u podstawy będzie niepoprawne geometrycznie i obarczone zniekształceniami uzależnionymi od stopnia odchylenia faktycznej osi konstrukcji od pionu. W celu wyeliminowania tego czynnika należy chmurę punktów poddać procesowi transformacji określanej terminem pionizacji.

Proces pionizacji chmury punktów względem osi wymaga wskazania analitycznego równania prostej współliniowej z osią konstrukcyjną o stwierdzonym pochyłym położeniu. Czynność tę można przeprowadzić w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej m.in. za pomocą dwóch punktów o znanych współrzędnych bądź za pomocą punktu i wektora [Bronsztejn i Siemiendajew, 2003]. W wyniku operacji przedstawionych w rozdziale 4.3.1 wyznaczono punkt na prostej (wyznaczony przez wektor \vec{P}_{c0} i wektor wypadkowy \vec{v}_{wyp} wskazujący kierunek osi. Proces pionizacji będzie realizowany poprzez translację chmury punktów do początku układu współrzędnych, a następnie przez jej rotację wokół wybranych osi lokalnego układu współrzędnych chmury punktów. W tym celu zostanie wyznaczony punkt charakterystyczny osi, który będzie spełniał dwa warunki: położenia na osi rozwinięcia oraz posiadania wysokości odpowiadającej wysokości najniższego punktu w chmurze. Dzięki zastosowaniu translacji chmury punktów do początku układu współrzędnych uzyskuje się nowe współrzędne punktów, cechujące się dodatkowymi wartościami współrzędnej z . Następująca po niej procedura rotacji doprowadza pochyłą oś rozwinięcia do warunku pionowości.

Wyznaczenie ortogonalnego rzutu najniższego punktu w chmurze (P_{min}) na pochyłą oś konstrukcji następuje poprzez obliczenie wartości parametru t właściwej dla danego punktu i zastosowanie jej w równaniu wektorowym prostej (4.16). Przedstawiając wektory w postaci współrzędnych równanie przyjmuje następującą postać [Hazewinkel, 1993]:

$$P_{os}(t) = \begin{bmatrix} x_{P_{c0}} \\ y_{P_{c0}} \\ z_{P_{c0}} \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} x_{v_{wyp}} \\ y_{v_{wyp}} \\ z_{v_{wyp}} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Wynikiem powyższego działania jest uzyskanie współrzędnych punktu położonego na prostej. Po przejściu z zapisu macierzowego każda ze współrzędnych ortokartezjańskiego układu obliczana jest następująco:

$$\begin{aligned} x &= x_{P_{c0}} + t \cdot x_{v_{wyp}} \\ y &= y_{P_{c0}} + t \cdot y_{v_{wyp}} \\ z &= z_{P_{c0}} + t \cdot z_{v_{wyp}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Po wyznaczeniu z każdego równania parametru t oraz przyrównania ich do siebie uzyskuje się inną postać równanie charakteryzującego przebieg prostej w przestrzeni trójwymiarowej:

$$t = \frac{x - x_{P_{c0}}}{x_{v_{wyp}}} = \frac{y - y_{P_{c0}}}{y_{v_{wyp}}} = \frac{z - z_{P_{c0}}}{z_{v_{wyp}}}. \quad (4.19)$$

Współrzędne najniższego punktu w chmurze (P_{min}) są funkcją parametru t i można je wyrazić w postaci zależności (4.18). Kolejnym krokiem jest wyznaczenie współrzędnych wektora \vec{w} ortogonalnego do osi rozwinięcia łączącego rzut punktu P_{min} na oś (punkt P'_{min}) a samym punktem P_{min} . Korzystając z definicji wektora jako macierzy kolumnowej przyrostów współrzędnych przyjmuje on następującą postać:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P_{min}} - (x_{P_{c0}} + t_{min} \cdot x_{v_{wyp}}) \\ y_{P_{min}} - (y_{P_{c0}} + t_{min} \cdot y_{v_{wyp}}) \\ z_{P_{min}} - (z_{P_{c0}} + t_{min} \cdot z_{v_{wyp}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{P_{min}} - x_{P_{c0}}) - t_{min} \cdot x_{v_{wyp}} \\ (y_{P_{min}} - y_{P_{c0}}) - t_{min} \cdot y_{v_{wyp}} \\ (z_{P_{min}} - z_{P_{c0}}) - t_{min} \cdot z_{v_{wyp}} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Z definicji ortogonalnego rzutowania wynika, że kąt pomiędzy kierunkiem rzutowania (reprezentowanym przez wektor \vec{w}) oraz kierunkiem prostej (reprezentowanym przez wektor \vec{v}_{wyp}) jest kątem prostym. Zważywszy, że iloczyn skalarny wektorów wzajemnie do siebie prostopadłych jest równy zero (funkcja cosinus kąta między wektorami), można zapisać następującą zależność [Hazewinkel, 1990]:

$$\vec{v}_{wyp} \circ \vec{w} = 0. \quad (4.21)$$

Iloczyn skalarny po wprowadzeniu współrzędnych wektorów ma następującą postać:

$$x_{v_{wyp}} [(x_{P_{min}} - x_{P_{c0}}) - t_{min} \cdot x_{v_{wyp}}] + y_{v_{wyp}} [(y_{P_{min}} - y_{P_{c0}}) - t_{min} \cdot y_{v_{wyp}}] + z_{v_{wyp}} [(z_{P_{min}} - z_{P_{c0}}) - t_{min} \cdot z_{v_{wyp}}] = 0. \quad (4.22)$$

Po uprządkowaniu wyrazów wyznaczona zostaje wartość parametru t :

$$t_{min} = \frac{x_{v_{wyp}} (x_{P_{c0}} - x_{P_{min}}) + y_{v_{wyp}} (y_{P_{c0}} - y_{P_{min}}) + z_{v_{wyp}} (z_{P_{c0}} - z_{P_{min}})}{x_{v_{wyp}}^2 + y_{v_{wyp}}^2 + z_{v_{wyp}}^2}. \quad (4.23)$$

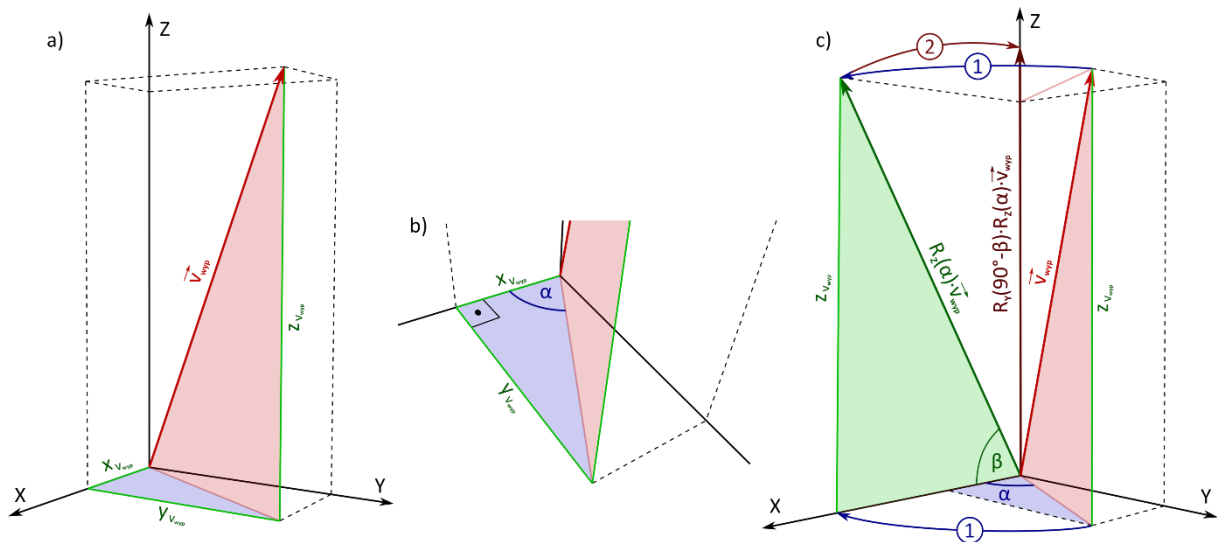
Otrzymana wartość parametru t_{min} umożliwia wyznaczenie, zgodnie z formułą (4.17), współrzędnych punktu P'_{min} (rzutu najniższego punktu chmury P_{min}) na pochyłą oś konstrukcyjną obiektu symetrycznego. Zważywszy, że obroty elementarne wokół osi X , Y i Z lokalnego układu współrzędnych nie powodują zmiany współrzędnych punktu początkowego układu, zasadnym jest uprzednie przeprowadzenie translacji całej chmury punktów w oparciu o wyznaczone współrzędne punktu osi P'_{min} . Translacja określona przez wektor:

$$\vec{v}_{Tr} = \begin{bmatrix} -x_{P'_{min}} \\ -y_{P'_{min}} \\ -z_{P'_{min}} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

który sprowadza chmurę punktów do początku układu współrzędnych. Punkt P'_{min} uzyskuje zerowe wartości współrzędnych a samym pochyłą oś konstrukcji przechodził przez początek układu. Uzyskana

po translacji konfiguracja przestrzenna chmury punktów jest wymagana do realizacji ostatniego etapu procesu pionizacji polegającego na sekwencji odpowiednich obrotów elementarnych (2.4) - (2.6).

Współrzędne x_{wyp} , y_{wyp} , z_{wyp} wektora \vec{v}_{wyp} zaczepionego w punkcie P'_{min} wskazują kierunek pochyłej osi konstrukcyjnej obiektu. W oparciu o współrzędne wektora można wyznaczyć wartości kątów α i β będących argumentami dwóch macierzy rotacji wokół dodatnich osi (OZ i OY) prawoskrętnego układu współrzędnych ortokartezjańskich, które doprowadzą wektora i oś do pionowego położenia (**Rys. 4.8**). Pierwszy obrót elementarny polega na rotacji wektora o kąt α , doprowadzający go do położenia w płaszczyźnie XZ układu. Drugim etapem przekształcenia jest obrót powstałego wektora wokół osi OY o kąt β , w efekcie czego uzyskuje on pionową orientację. Tym samym wprowadzany jest pionowy przebieg osi konstrukcyjnej obiektu symetrycznego. Sekwencję dwóch następujących po sobie obrotów oznaczono liczbami porządkowymi na **Rys. 4.8 c**. Współrzędne wektora wypadkowego pozwalają na obliczenie kąta dwuściennego α pomiędzy płaszczyzną XZ oraz płaszczyzną wektora (**Rys. 4.8 a i b**). Kąt ten jest funkcją współrzędnych horyzontalnych wektora x_{wyp} , y_{wyp} i stanowi argument elementarnej rotacji wektora wokół osi OZ . W nowym położeniu obliczany jest w płaszczyźnie pionowej kąt β pomiędzy osią OX oraz obróconym wektorem wypadkowym. Następnie obliczane jest dopełnienie kąta β do 90° , które stanowi argument drugiej elementarnej rotacji wokół osi OY , doprowadzający wektor do kierunku pionu.



Rys. 4.8. Pionizacja pochyłej osi rozwinięcia z wykorzystaniem elementarnych macierzy rotacji.

Kąty α i β , określane w literaturze również jako kąty Eulera [**Bronsztejn i Siemiendajew, 2003**], wyznaczone są ze współrzędnych wektora wypadkowego osi za pomocą następujących formuł:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y_{v_{wyp}}}{x_{v_{wyp}}}\right), \quad (4.25)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{x_{v_{wyp}}^2 + y_{v_{wyp}}^2}}{\sqrt{x_{v_{wyp}}^2 + y_{v_{wyp}}^2 + z_{v_{wyp}}^2}}\right). \quad (4.26)$$

Elementarne rotacje o kąty α i β doprowadza wektor wypadkowy \vec{v}_{wyp} i oś konstrukcyjną obiektu do warunku pionowości. Wektory powstałe z obrotu wektora wypadkowego zostały na **Rys. 4.8 c** opisane zgodnie z zastosowanymi operacjami macierzowymi. Podobnemu przekształceniu poddawany jest każdy punkt z chmury, dzięki czemu cały zbiór danych doprowadzony jest do warunku pionowości:

$$\begin{bmatrix} x'_P \\ y'_P \\ z'_P \end{bmatrix} = \mathbf{R}_Y(90^\circ - \beta) \cdot \mathbf{R}_Z(\alpha) \cdot \begin{bmatrix} x_P - x_{P'_{min}} \\ y_P - y_{P'_{min}} \\ z_P - z_{P'_{min}} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

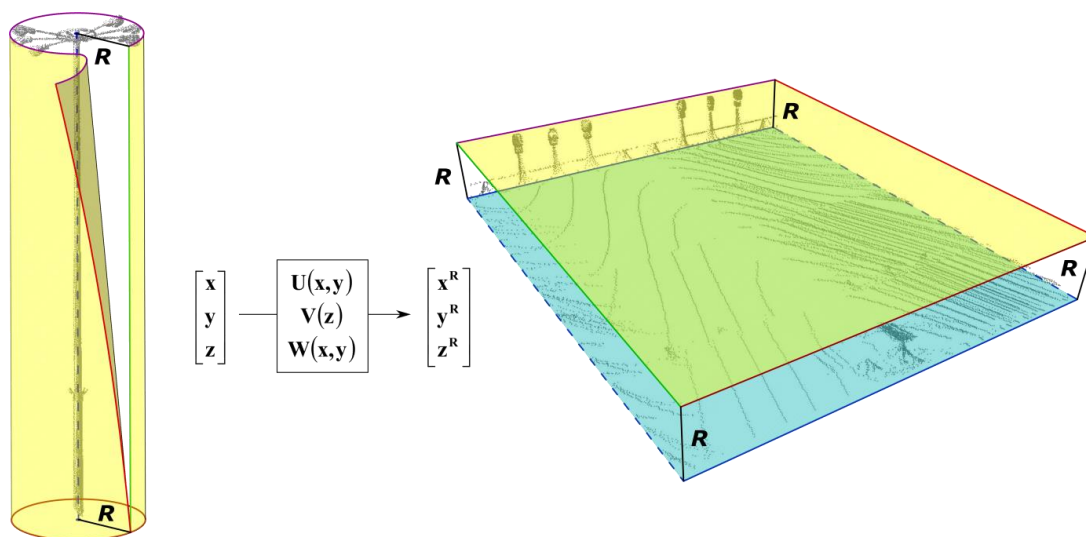
gdzie:

x'_P, y'_P, z'_P - współrzędne ortokartezjańskie punktu po przeprowadzeniu pionizacji,

x_P, y_P, z_P - współrzędne ortokartezjańskie punktu w źródłowej chmurze punktów.

4.3.3 Funkcje odwzorowawcze przestrzennego rozwinięcia chmur punktów walcowych obiektów symetrycznych

Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów polega na przyjęciu walca, którego promień R będzie zapewniał korzystny rozkład zniekształceń oraz jak największą czytelność opracowania. Oś walca pokrywa się z osią konstrukcyjną obiektu przedstawionego w formie chmury punktów. Długość promienia wskazuje położenie pobocznic walca w przestrzeni nieprzetworzonej chmury punktów. W wyniku rozwinięcia, na pobocznicę nie wystąpią zniekształcenia liniowe. Część chmury punktów położona pomiędzy osią konstrukcyjną a pobocznicą walca ulega rozciągnięciu, podczas gdy część położona dalej od niej ulega skurczeniu. Ideowy schemat rozwinięcia przedstawiono na **Rys. 4.9**.



Rys. 4.9. Idea przestrzennego rozwinięcia chmury punktów na pobocznicę walca.

Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów symetrycznego obiektu podłużnego powoduje zobrazowanie pierwotnej struktury chmury punktów względem pobocznic walca o przyjętym promieniu R . Promień R jest pierwszym parametrem rozwinięcia. Pobocznicę walca (kolor żółty) przyjmuje po przekształceniu postać płaszczyzny. Również pionowa oś konstrukcyjna (kolor niebieski) przekształca się w płaszczyznę. Punkty znajdujące się w przestrzeni pomiędzy osią a pobocznicą walca odwzorowują się pomiędzy dwiema wspomnianymi powierzchniami. Na **Rys. 4.9** można

zaobserwować, że poszczególne kierunki (półpłaszczyzny rozpoczynające się w osi rozwinięcia) odwzorowują się jako półpłaszczyzny prostopadłe do obrazów osi rozwinięcia i pobocznicy walca. Wertykalny wymiar przestrzennego rozwinięcia stanowi odległość punktów chmury od osi konstrukcyjnej (parametr głębokości). W efekcie uzyskiwana jest alternatywna postać chmury punktów, która w czytelny i przejrzysty sposób prezentuje geometrię obiektu, eliminując tym samym trudności interpretacyjne oraz przesłanianie się punktów w chmurze.

Parametr kątowy rozwinięcia φ jest utworzony w płaszczyźnie prostopadłej do osi rozwinięcia walca (dla pionowych obiektów symetrycznych jest to horyzontalna płaszczyzna XY) i określa kierunek danego punktu P w chmurze względem początkowego kierunku rozwinięcia:

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y_P - y_{P'_{\min}}}{x_P - x_{P'_{\min}}}\right) & \text{dla } (x_P - x_{P'_{\min}} > 0) \wedge (y_P - y_{P'_{\min}} \geq 0) \\ 90^\circ & \text{dla } (x_P - x_{P'_{\min}} = 0) \wedge (y_P - y_{P'_{\min}} > 0) \\ \arctan\left(\frac{y_P - y_{P'_{\min}}}{x_P - x_{P'_{\min}}}\right) + 180^\circ & \text{dla } x_P - x_{P'_{\min}} < 0 \\ 270^\circ & \text{dla } (x_P - x_{P'_{\min}} = 0) \wedge (y_P - y_{P'_{\min}} < 0) \\ \arctan\left(\frac{y_P - y_{P'_{\min}}}{x_P - x_{P'_{\min}}}\right) + 360^\circ & \text{dla } (x_P - x_{P'_{\min}} > 0) \wedge (y_P - y_{P'_{\min}} < 0) \\ \text{nieokreślony} & \text{dla } (x_P - x_{P'_{\min}} = 0) \wedge (y_P - y_{P'_{\min}} = 0) \end{cases}, \quad (4.28)$$

gdzie x_P i y_P to współrzędne ortokartezjańskie horyzontalne punktu w chmurze, zaś $x_{P'_{\min}}$ i $y_{P'_{\min}}$ to analogiczne współrzędne spionizowanej osi rozwinięcia.

Parametr kątowy przestrzennego φ rozwinięcia pełni rolę zbliżoną do geodezyjnego azymutu. Niemniej, przy zastosowaniu matematycznego układu współrzędnych nie spełnia on warunków azymutu w postaci kierunku narastania kąta od północy zgodnie z ruchem wskazówek zegara [Łyszkowicz, 2006]. W definicji funkcji (4.28) konieczne jest zawarunkowanie dziedziny względem znaków i wartości przyrostów współrzędnych $(x_P - x_{P'_{\min}})$ i $(y_P - y_{P'_{\min}})$, gdyż funkcja arcus tangens nie zwraca wartości pełnego kąta kierunkowego, a jedynie kąt linii z osią OX zwany czwartakiem [Ząbek, 2012]. Pomimo faktu, że wyeliminowanie ujemnych wartości kąta φ nie stanowi istotnej różnicy w procesie obliczeniowym, to jest ono zasadne z punktu widzenia oczekiwanego rezultatu rozwinięcia. W związku z powyższym w piątym warunku (4.28) wyeliminowano ujemne wartości funkcji uzyskiwane dla ujemnych przyrostów $(y_P - y_{P'_{\min}})$ poprzez dodanie kąta pełnego. Wynikowa chmura punktów ma bowiem prezentować strukturę przekształcanego zbioru pierwotnego od zadanego kierunku rozwinięcia, tj. od półpłaszczyzny XZ . Nie wprowadzając korekty ujemnej wartości kąta, zadany kierunek początkowy rozwinięcia w wyniku odwzorowania znalazłby się pośrodku wynikowej chmury punktów. Eliminacja ujemnych wartości kąta φ zapewnia jednoznaczność określania początkowego kierunku rozwinięcia.

Trzecim parametrem przestrzennego rozwinięcia chmury punktów jest parametr liniowy h wyrażający odległość punktów od spionizowanej osi rozwinięcia. W odwzorowanej, rozwiniętej chmurze pełni on funkcję parametru głębokości wyrażającego odległość punktu nad powstałą z odwzorowania osi rozwinięcia płaszczyzną odniesienia (Rys. 4.5).

$$h = \sqrt{(x_P - x_{P'_{\min}})^2 + (y_P - y_{P'_{\min}})^2}. \quad (4.29)$$

Funkcje odwzorowawcze przestrzennego odwzorowania chmury punktów na pobocznice walca spionizowanej chmury punktów w zapisie macierzowym wyrażone są następującą formułą:

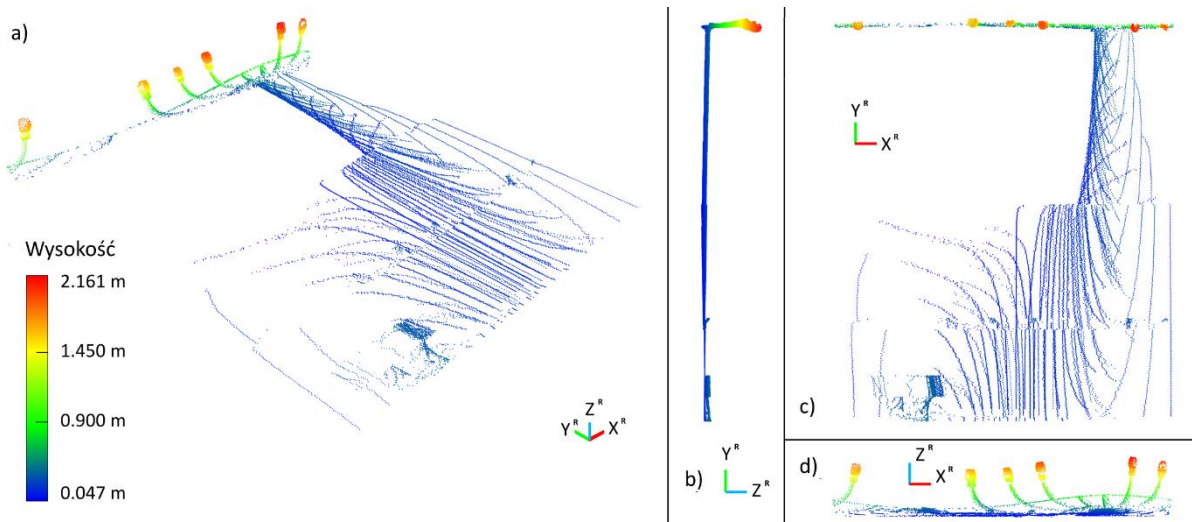
$$\begin{bmatrix} x_P^R \\ y_P^R \\ z_P^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(x_P, y_P) \\ V(z_P) \\ W(x_P, y_P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cdot \varphi \\ z_P \\ h \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Zadanie odwrotne, polegające na przywróceniu pierwotnej postaci chmury punktów z jej przestrzennego rozwinięcia, wymaga przyjęcia długości promienia R walca użytego pierwotnie w rozwinięciu. Przekształcenie realizowane jest poprzez odwrotne funkcje odwzorowawcze:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(R, x_P^R, z_P^R) \\ v(R, x_P^R, z_P^R) \\ w(y_P^R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_P^R \cdot \cos\left(\frac{x_P^R}{R}\right) \\ z_P^R \cdot \sin\left(\frac{x_P^R}{R}\right) \\ y_P^R \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

4.3.4 Pochyłość osi konstrukcyjnej a poprawność geometryczna przestrzennego rozwinięcia chmury punktów walcowych obiektów symetrycznych

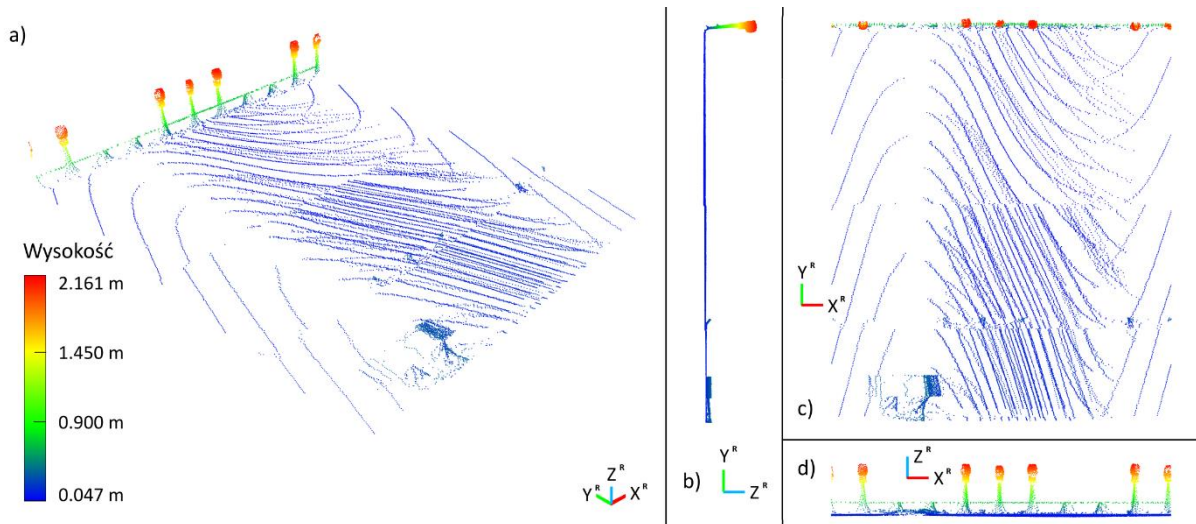
Rezultat przestrzennego rozwinięcia chmury punktów latarni ulicznej stanowi zbiór danych przestrzennych, które w czytelny sposób przedstawiają geometrię obiektu. Osiągnięcie tego celu poprzedzone było procesem pionizacji chmury punktów przeprowadzonej na podstawie stwierdzonej w rozdziale 4.3.1 pochyłości osi konstrukcyjnej podpory latarni. Wpływ kolejnych etapów pionizacji na poprawność realizacji przestrzennego rozwinięcia chmury punktów przedstawiono na kilku poniższych rysunkach. Nie uwzględnienie czynnika pochylenia konstrukcji generuje niepoprawną strukturę chmury, gdyż rozwinięcie w takim przypadku jest w pewnym zakresie ekscentryczne (**Rys. 4.10**). Odchylenie osi latarni od pionu powoduje pojawienie się zaburzeń rozwinięcia, które stopniowo zwiększają się wraz ze wzrostem wartości współrzędnej wysokościowej z punktów w pierwotniej niespionizowanej chmurze.



Rys. 4.10. Przestrzenne rozwinięcie niespionizowanej chmury punktów w rzucie izometrycznym (a) oraz rzutach ortogonalnych: z boku (b), z góry (c) i od frontu (d).

Pochyłość chmury przejawia się w błędnym rozwinięciu powierzchni walcowej podpory latarni oraz wieńczącego ją układu lamp. Odwzorowane ramiona latarni z lampami nie są prostoliniowe, a ich rozmieszczenie jest niesymetryczne i zakrzywione. Ponadto, w górnej części **Rys. 4.10 c** zaobserwować można wpływ ekscentryczności podpory latarni względem pionowej osi rozwinięcia, polegający na wychyleniu względem osi części punktów chmury obrazującej podporę (**Rys. 4.10 b**). Fragment obrazu podpory latarni po rozwinięciu znajduje się w wąskim, zwężającym się pasie widocznym na rzucie z góry (**Rys. 4.10 c**). Pochyłość chmury punktów powoduje również, że obrazy poszczególnych ramion latarni w przestrzennym rozwinięciu posiadają krzywizny, podczas gdy powinny one odwzorować się jako obiekty liniowe.

Zastosowanie algorytmu pionizacji modyfikującego strukturę źródłowej chmury punktów poprzez jej pionizację umożliwia uzyskanie poprawnej rozwiniętej chmury punktów (**Rys. 4.11**). W rozwinięciu nie występują zniekształcenia towarzyszące niespionizowanej osi konstrukcyjnej (**Rys. 4.10**), a wynikowa chmura punktów jest regularna i spójna. Wniosek taki można wysnuć na podstawie walcowej podpory latarni odwzorowanej w postaci rozciągniętej powierzchni i obecności dodatkowych elementów odstających (np. mocowań na flagi lub szafki sterowniczej). Należy odnotować podział obrazu jednego z ramion latarni na dwie części znajdujące się po skrajnych stronach rozwinięcia (**Rys. 4.10 a, c, d**).

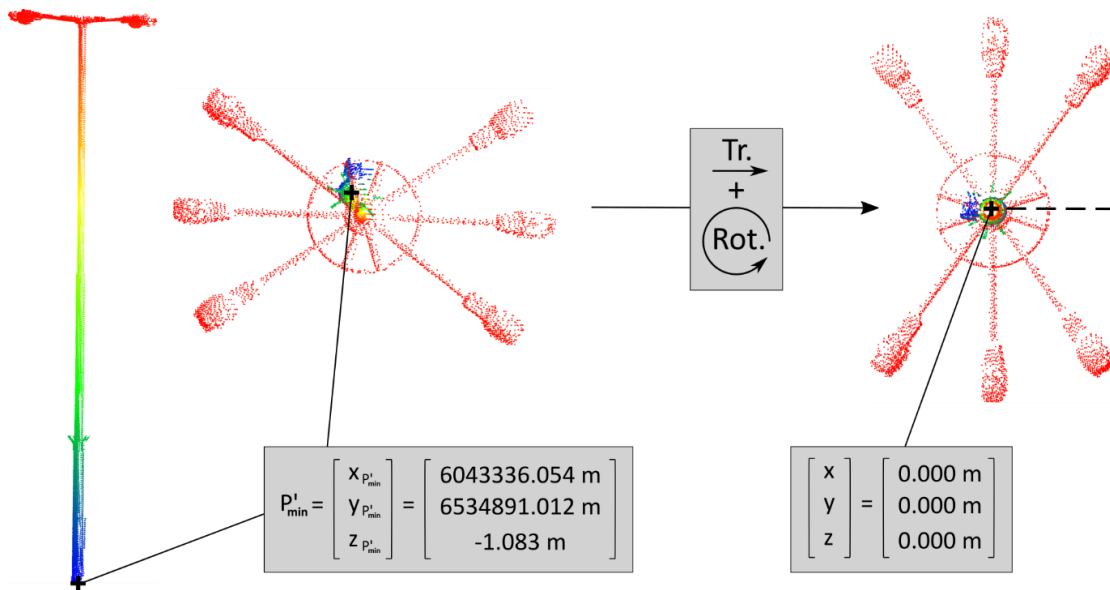


Rys. 4.11. Przestrzenne rozwinięcie spionizowanej chmury punktów w rzucie izometrycznym (a) oraz rzutach ortogonalnych: z boku (b), z góry (c) i od frontu (d).

Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów na pobocznicy walca posiada kierunek początkowy w pierwotnej chmurze punktów zdefiniowany poprzez wyznaczoną przez półpłaszczyznę XZ skierowaną w stronę dodatniej osi OX . Na skutek wprowadzonych warunków do parametru kąтового rozwinięcia (4.28), kierunek ten charakteryzuje się zerowymi współrzędnymi x^r rozwinięcia. Może się jednak zdarzyć przypadek, w którym kierunek ten będzie przebiegał przez istotny z punktu widzenia przeprowadzanych analiz element przedstawianego obiektu. W takim wypadku, na skutek rozwinięcia dwie jego części znajdują się na skrajnych stronach rozwiniętej chmury punktów reprezentujących kierunki o wartościach większych od 0° i mniejszych od 360° . Niedogodność ta może być rozwiązana poprzez zastosowanie innego kierunku początkowego, który nie przecinałby istotnych fragmentów obiektu. Zadanie to można przeprowadzić poprzez wprowadzenie do formuły przestrzennego rozwinięcia chmury punktów (4.30) dodatkowego obrotu elementarnego wokół osi Z (4.27) o kąt γ :

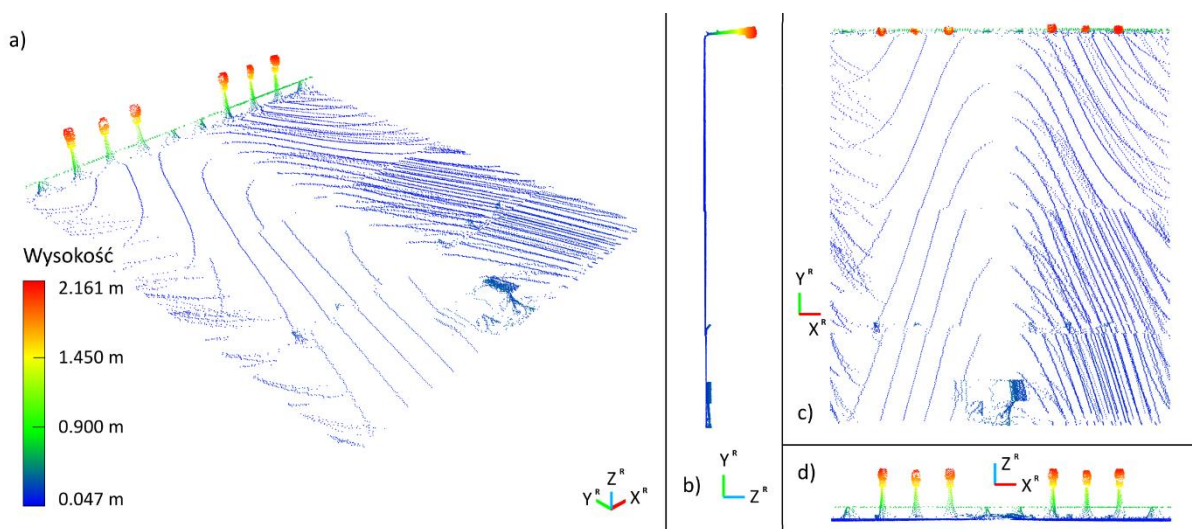
$$\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{bmatrix} = \mathbf{R}_Z(\gamma) \cdot \mathbf{R}_Y(90^\circ - \beta) \cdot \mathbf{R}_Z(\alpha) \cdot \begin{bmatrix} x_p - x_{p'_{\min}} \\ y_p - y_{p'_{\min}} \\ z_p - z_{p'_{\min}} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

Zastosowanie powyższego rozwiązania przedstawiono na przykładzie użytej w rozdziale 4.3.1 chmury punktów latarni ulicznej. Przyjęcie konkretnej wartości kąta γ uzależnione jest od struktury geometrycznej pierwotnej chmury punktów pomierzonego obiektu i pożądanego położenia kierunku początkowego przestrzennego rozwinięcia. Translacja zdefiniowana w ostatnim czynniku iloczynu macierzy (4.32) jest zasadna zwłaszcza w przypadku chmur punktów z wprowadzoną georeferencją i posiadających współrzędne o znacznych wartościach, takich jak np. państwowy układ współrzędnych płaskich PL-2000 [Rozporządzenie, 2012]. Zmniejszenie wartości współrzędnych poprzez przesunięcie pionowej osi rozwinięcia do początku układu współrzędnych przyczynia się do przyspieszenia wyświetlania i przetwarzania chmury punktów. Wynik wprowadzenia dodatkowej rotacji przedstawiono na **Rys. 4.12**.



Rys. 4.12. Pionizacja chmury punktów z zastosowaną dodatkową rotacją wokół osi OZ .

Na rysunku czarnym krzyżykiem przedstawiono punkt P'_{min} będący rzutem punktu o minimalnej wysokości w chmurze punktów na oś konstrukcyjną latarni. Widoczna jest tam również pochyłość, która wynika z odchylenia osi od pionu. Horyzontalne współrzędne państwowego układu PL-2000 zostały zamienione dla zachowania klasycznego matematycznego układu osi OX i OY . W wyniku procesu pionizacji uzyskano przesunięcie punktu P'_{min} do początku układu współrzędnych oraz doprowadzenie osi rozwinięcia do warunku pionowości (**Rys. 4.12**). Na rysunku widoczna jest również nowa orientacja chmury punktów. Zmiana orientacji nastąpiła w wyniku zastosowania dodatkowej elementarnej rotacji wokół osi OZ o kąt γ , co spowodowało obrót chmury punktów wokół osi rozwinięcia. Tym samym nowe położenie kierunku początkowego rozwinięcia (zaznaczonego przerywaną czarną linią) nie przecina żadnego istotnego elementu funkcjonalnego latarni (**Rys. 4.13**) i występujący wcześniej (**Rys. 4.11**) podział obrazu ramienia latarni na dwie części został wyeliminowany.



Rys. 4.13. Przestrzenne rozwinięcie spionizowanej chmury punktów z przeprowadzonym dodatkowym obrotem w rzucie izometrycznym (a) oraz rzutach ortogonalnych: z boku (b), z góry (c) i od frontu (d).

Dodatkowa rotacja wokół osi OZ odpowiada przesunięciu rozwinięcia w płaszczyźnie poziomej o wartość przyrostu współrzędnej x odpowiadającej kątowi γ . Przedstawione izometryczne i ortogonalne rzuty rozwiniętej chmury punktów umożliwiają identyfikację szeregu parametrów geometrycznych latarni, m.in. wzajemnej współliniowości, równego odstępu kąowego elementów funkcjonalnych czy występowania zniekształceń konstrukcji.

4.4 Przestrzenne rozwinięcia chmur punktów sferycznych i elipsoidalnych obiektów symetrycznych

Drugim rodzajem obiektów symetrycznych rozpatrywanych pod kątem ich przestrzennych rozwinięć są obiekty sferyczne i elipsoidalne. Właściwości fizyczne tych obiektów znajdują szerokie zastosowanie w budownictwie. Od poprzednio przedstawionych obiektów walcowych różni je inny charakter symetrii. Zarówno walec, jak i sferę czy elipsoidę można skonstruować poprzez obrót połowy ich wertykalnego przekroju poprzecznego o 360° , bądź poprzez obrót pełnego przekroju o kąt 180° . Tym samym oś obrotu przekroju stanowi oś symetrii bryły. Sfera, będąca szczególnym przypadkiem elipsoidy obrotowej z zerowym mimośrodem i zerowym spłaszczeniem, posiada nieskończenie wiele osi symetrii. Co więcej, jej punkt środkowy sfery stanowi punkt symetrii a odległość pomiędzy nim a dowolnym punktem na powierzchni jest stała (promień sfery). Ogniska elipsoidy obrotowej cechuje inna zależność geometryczna. W przypadku każdego punktu powierzchni elipsoidy zachodzi stałość sumy odległości pomiędzy tym punktem a dwoma ogniskami. Obie wymienione właściwości znajdują zastosowanie w przestrzennych rozwinięciach chmur punktów.

Wyznaczenie parametrów charakterystycznych sfery i elipsoidy obrotowej na podstawie punktów ich powierzchni realizowane jest wieloma metodami numerycznymi w [Schnabel i in., 2007], [Demantke i in., 2011], [Serafin i Grisetti, 2015]. Efektem wpasowania jest wyznaczenie współrzędnych punktów (środku sfery i ognisk elipsoidy) oraz wielkości liniowych (promienia sfery oraz dłuższej i krótszej półosi elipsoidy). Wielkości te definiują powierzchnię pierwotną przyjmowaną w przestrzennych rozwinięciach. Na podstawie parametrów brył następuje przyjęcie krzywoliniowego układu współrzędnych i przypisanie odpowiednich wartości kątowych i liniowych punktom w chmurze. Tym samym przeprowadzona zostaje alternatywna parametryzacja opisujących powierzchnię pomierzonego obiektu, zbliżona do siatki parametrycznej współrzędnych geodezyjnych ziemskich stosowanej w kartografii na odpowiedniej powierzchni odniesienia. Uzasadniona jest zatem adaptacja w przestrzennych rozwinięciach chmur punktów klasycznych formuł odwzorowawczych realizujących przejście z przestrzeni trójwymiarowej na powierzchnię płaską.

Biorąc pod uwagę liczny zbiór opracowanych klasycznych odwzorowań kartograficznych [Snyder i Voxland, 1989], [Pędzich, 2014], wybór konkretnego rozwiązania związany jest z geometrią przetwarzanej chmury punktów oraz zakładanym celem przestrzennego rozwinięcia. Może nim być przykładowo eliminacja konkretnego typu zniekształceń odwzorowawczych, zawsze obecnych przy stosowaniu kartografii matematycznej. Uzyskiwane na drodze klasycznych formuł odwzorowawczych współrzędne płaskie, są uzupełniane o trzeci wymiar prezentujący wybraną cechę geometryczną (np. odległość punktu od środka bryły). Dysponując wyznaczoną wcześniej powierzchnią pierwotną, można ją wykorzystać do zobrazowania odbiegania rzeczywistego kształtu obiektu (reprezentowanego przez chmurę punktów) od przyjętej pierwotnej idealnej geometrycznie powierzchni odniesienia.

4.4.1 Parametry geometryczne definiujące sferyczne i elipsoidalne obiekty symetryczne

Chmury punktów pochodzące z pomiaru sklepień, silosów czy innych symetrycznych obiektów sferycznych i elipsoidalnych stanowią najczęściej gęsty zbiór danych przestrzennych. Punkty

reprezentujące elementy odstające od zasadniczej powierzchni bryły stanowią niewielki procent wszystkich punktów w chmurze. Spostrzeżenie to stanowi argument do stosowania nieodpornych i odpornych metod geodezyjnego rachunku wyrównawczego do estymacji parametrów geometrycznych brył [Wiśniewski, 2013], [Huber, 1964]. W celu ich wyznaczenia za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów należy utworzyć układ równań parametrów właściwych dla danego obiektu [Jekel, 2016]. Dla każdego punktu powierzchni sfery można zapisać następującą zależność [Bronsztajn i Siemiendiajew, 2003]:

$$(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 + (z_i - z_c)^2 = R^2. \quad (4.33)$$

W równaniu występują cztery niewiadome stanowiące trzy współrzędne punktu środkowego sfery x_c, y_c, z_c oraz promień R . Do wyznaczenia ich estymatorów konieczne jest występowanie obserwacji nadliczbowych. Niezbędne jest zatem posiadanie współrzędnych co najmniej pięciu punktów, co w przypadku technologii skaningu laserowego spełnione jest niemal w każdym przypadku. Macierz współczynników oraz macierz wyrazów wolnych posiadają liczbę wierszy odpowiadającą liczbie punktów aproksymujących kształt sfery. Na ich podstawie wyznaczany jest wektor poszukiwanych parametrów.

Analogicznie do równania opisującego sferę (4.33), w geometrii analitycznej występuje równanie opisujące elipsoidę obrotową [Hazewinkel, 1995]. Wyznaczenie parametrów elipsoidy obrotowej jest realizowane poprzez stosowanie algorytmów przedstawionych w literaturze przedmiotu [Li i Griffiths, 2004], [Grammalidis i Strintzis, 2000], [Eberly, 2000]. Elipsoidy obrotowe różnią się od elipsoid jednakową długością półosi w płaszczyźnie XY . Wyróżnia się elipsoidy obrotowe spłaszczone i wydłużone. W pierwszym przypadku półoś b jest krótsza od półosi a , w drugim sytuacja jest odwrotna [Arfken, 1970]. Równanie kanoniczne elipsoidy obrotowej zawiera o jedną niewiadomą więcej niż równanie sfery (4.34). Poza współrzędnymi geometrycznego środka elipsoidy wyznaczeniu podlegają długości dwóch półosi. W przypadku sfery był to jedynie promień, gdyż sfera cechuje się zerowym pierwszym mimośrodem i zerowym spłaszczeniem.

$$\frac{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2}{a^2} + \frac{(z_i - z_c)^2}{b^2} = 1. \quad (4.34)$$

Współrzędne ognisk elipsoidy obrotowej wyznacza się na podstawie pierwszego mimośrodu informującego jaką częścią dłuższej półosi jest odcinek pomiędzy jej geometrycznym środkiem a ogniskiem. Odcinek ten określany jest mianem ogniskowej i w przypadku elipsoidy obrotowej wydłużonej wyznaczany jest za pomocą formuły:

$$f = \sqrt{b^2 - a^2}, \quad (4.35)$$

gdzie:

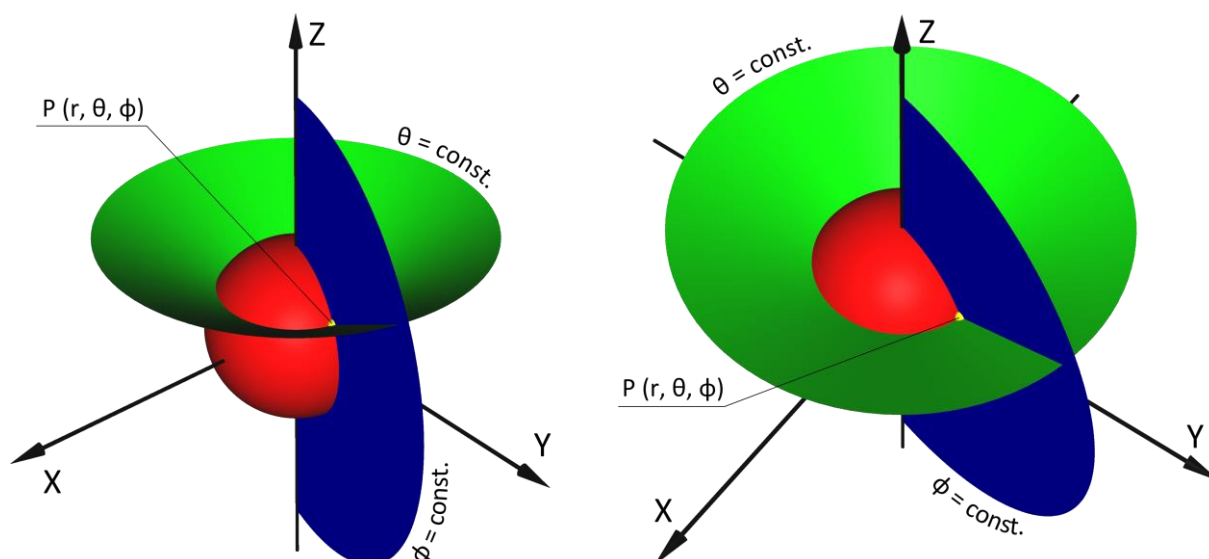
- f – ogniskowa elipsoidy obrotowej wydłużonej,
- b – długość dłuższej (wertykalnej) półosi elipsoidy,
- a – długość krótszej (horyzontalnej) półosi elipsoidy.

Dłuższa półoś elipsoidy obrotowej wydłużonej skierowana jest w kierunku wertykalnym, zatem współrzędne horyzontalne x, y ognisk są tożsame ze współrzędnymi geometrycznego punktu

środkowego elipsoidy. Współrzędne wertykalne uzyskuje się poprzez pomniejszenie i powiększenie o długość ogniskowej f współrzędnej wertykalnej środka elipsoidy obrotowej.

4.4.2 Układy współrzędnych krzywoliniowych sferycznych i elipsoidalnych obiektów symetrycznych

Współrzędne punktu na powierzchni sfery mogą zostać wyrażone w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej za pomocą współrzędnych ortokartezjańskich lub sferycznych. Współrzędne ortokartezjańskie odpowiadają rzutom ortogonalnym punktu na osie OX , OY , OZ układu. Rzutowanie polega na określeniu wartości każdej ze współrzędnych x , y , z w punkcie przecięcia osi z odpowiednimi płaszczyznami zawierającymi dany punkt i równoległymi do płaszczyzn YZ , XZ i XY . Przykładowo współrzędną x można odczytać z przecięcia osi OX z płaszczyzną równoległą do płaszczyzny YZ zawierającą punkt P [Bronsztejn i Siemiendiajew, 2003]. Współrzędne sferyczne wyrażają położenie punktu poprzez kąty ϑ i φ oraz odległość r od początku układu współrzędnych. Układ współrzędnych krzywoliniowych sferycznych można przedstawić jako sferę o promieniu r . Punkt P położony na jej powierzchni zostaje jednoznacznie określony poprzez kąt w płaszczyźnie wertykalnej ϑ oraz kąt w płaszczyźnie horyzontalnej φ (Rys. 4.14).



Rys. 4.14. Konfiguracja przestrzenna układu współrzędnych ortokartezjańskich x , y , z oraz współrzędnych krzywoliniowych ϑ , φ , r sfery.

Współrzędna ϑ przyjmuje wartości z zakresu od 0° do 180° określając wartość kąta pionowego w płaszczyźnie wertykalnej, liczonej od dodatniego kierunku osi OZ w dół. Współrzędna φ definiuje położenie punktu w płaszczyźnie horyzontalnej względem początku układu współrzędnych oraz kierunku początkowego wyznaczonego przez dodatni kierunek osi OX . Przyjmuje ona wartości z zakresu kąta pełnego. Ostatnia ze współrzędnych, promień r , jest wielkością liniową i przyjmuje wartości nieujemne. Stałe wartości współrzędnych krzywoliniowych ϑ , φ oraz współrzędnej liniowej r przyjmują postać powierzchni bocznej stożka (współrzędna ϑ), półpłaszczyzny (współrzędna φ) oraz sfery (współrzędna r). Stożki wyznaczające wartości współrzędnej ϑ posiadają wspólny wierzchołek w geometrycznym punkcie środkowym sfery. Wyjątkowymi przypadkami są skrajne wartości $\vartheta = 0^\circ$ oraz $\vartheta = 180^\circ$, dla których stałe wartości współrzędnych redukują się ze stożków do półprostych oraz wartość $\vartheta = 90^\circ$, gdzie punkty o stałej współrzędnej tworzą płaszczyznę.

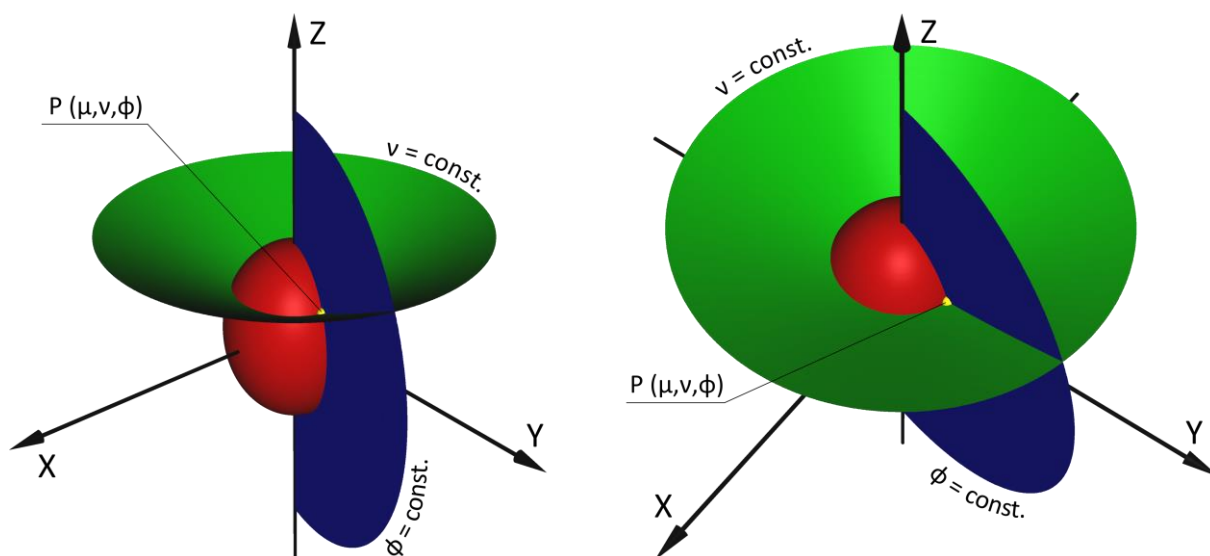
Wyznaczenie współrzędnych krzywoliniowych ϑ , φ , r punktu P ze współrzędnych ortokartezjańskich x , y , z realizowane jest za pomocą formuł [Bronszejn i Siemiendajew, 2003]:

$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ r = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} \end{cases} . \quad (4.36)$$

Operację odwrotną wykonuje się z kolei według następujących zależności [Hazewinkel, 1992]:

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases} . \quad (4.37)$$

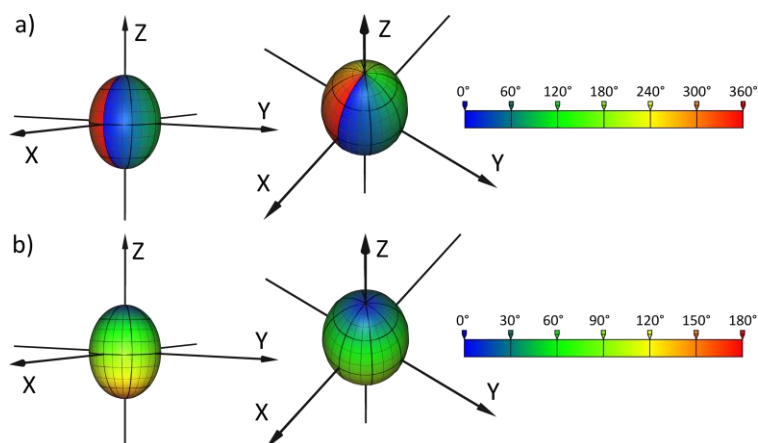
Przeprowadzenie przestrzennego rozwinięcia elipsoidy obrotowej wydłużonej wymaga wprowadzenia analogicznego układu współrzędnych krzywoliniowych na elipsoidzie (**Rys. 4.15**). Cechą układu jest równomierne rozmieszczenie linii parametrycznych krzywoliniowych współrzędnych μ , v , φ . Położenie punktu P w układzie współrzędnych definiowane jest poprzez jego odległość od ognisk oraz współrzędne kątowe w płaszczyźnie wertykalnej i horyzontalnej na powierzchni elipsoidy.



Rys. 4.15. Konfiguracja przestrzenna układu współrzędnych ortokartezjańskich x , y , z oraz współrzędnych krzywoliniowych μ , v , φ elipsoidy obrotowej wydłużonej.

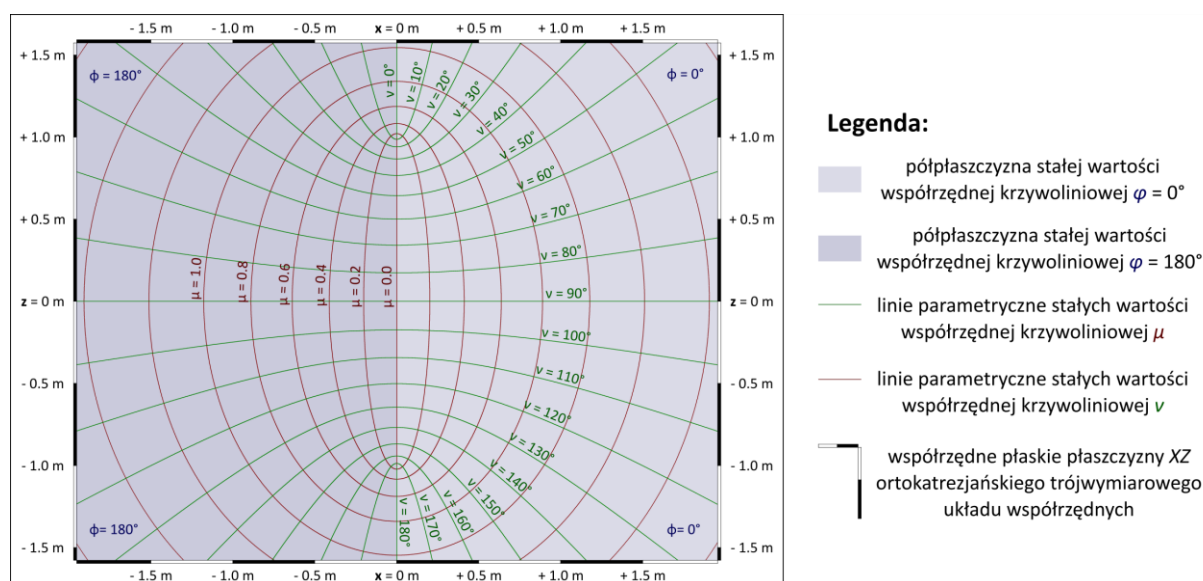
Współrzędna μ wyraża odległość punktu od ognisk elipsoidy obrotowej. Stałe wartości współrzędnej μ tworzą elipsoidy o różnej wielkości (kolor czerwony na **Rys. 4.15**). Przynależność punktu do odcinka ogniskowej f wskazywana jest zatem przez współrzędną $\mu = 0$. Współrzędna krzywoliniowa v jest odpowiednikiem współrzędnej kątowej wertykalnej w elipsoidzie spłaszczonej (kolor zielony na **Rys. 4.15**). Wartość współrzędnej narasta od kierunku górnego bieguna do dolnego w zakresie od 0° do 180° . Cechą charakterystyczną powierzchni składających się z punktów o stałej

wartości współrzędnej v jest ich hiperboloidalny kształt (z wyjątkiem wartości równych wielokrotności kąta 90° , dla których przyjmują one postać półprostych mających swój początek bądź w ogniskach ($v = 0^\circ$ i $v = 180^\circ$), bądź postać płaszczyzny ($v = 90^\circ$). Hiperboloidalny kształt powierzchni wynika z geometrii elipsoidy i obecności dwóch ognisk (w przeciwieństwie do jednego punktu środkowego sfery). Trzecia współrzędna φ określa kąt dwuścienny w płaszczyźnie horyzontalnej pomiędzy półpłaszczyznami o wspólnej krawędzi na linii ogniskowej (kolor niebieski na **Rys. 4.15**). Współrzędna przyjmuje wartości z zakresu kąta pełnego. Kierunkiem początkowym kąta φ jest półpłaszczyzna tworzona przez oś OZ i dodatni kierunek osi OX . Graficzną interpretację współrzędnych krzywoliniowych v i φ wraz z zakresem przyjmowanych przez nie wartości przedstawiono na **Rys. 4.16**.



Rys. 4.16. Zakreсы wartości współrzędnych krzywoliniowych φ (a) i v (b) przyjmowane dla stałej wartości współrzędnej $\mu = 1$.

Kształt linii parametrycznych współrzędnych μ i v korzystnie jest przedstawić dla dwóch przeciwstawnych wartości współrzędnej φ na wykresie płaskim przebiegu izolinii. Półpłaszczyzny $\varphi = 0^\circ$ i $\varphi = 180^\circ$ zlokalizowane w płaszczyźnie XZ układu współrzędnych trójwymiarowych zostały oznaczone dwoma odcieniami koloru niebieskiego (**Rys. 4.17**). Na rysunku przyjęto jednostkową długość ogniskowej elipsoidy f .



Rys. 4.17. Izolinie współrzędnych μ , v odpowiadające dwóm przeciwstawnym wartościom współrzędnej φ położone w płaszczyźnie XZ trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Na wykresie widoczna jest podwojona długość ogniskowej f wynosząca 2 m (wertykalny odcinek właściwy dla $\mu = 0$). Kolejne izolinie współrzędnej μ przedstawiono z interwałem 0.2. Na **Rys. 4.17** można zauważyć stopniowe zbliżanie się kolejnych elipsoid wydłużonych do kształtu sferycznego. Eliptyczne i hiperboliczne izolinie są częściami wspólnymi (krawędziami przecięć) półpłaszczyzn dwóch stałych wartości współrzędnej φ oraz powierzchni charakteryzujących się stałymi wartościami współrzędnych μ i ν .

Zależności pomiędzy współrzędnymi krzywoliniowymi i ortokartezjańskimi mają następującą postać [**Budiman i Talib, 2010**], [**McQuarrie, 2003**]:

$$\begin{cases} x = f \sinh(\mu) \sin(\nu) \cos(\phi) \\ y = f \sinh(\mu) \sin(\nu) \sin(\phi) \\ z = f \cosh(\mu) \cos(\nu) \end{cases} \quad (4.38)$$

Obecna we wzorze długość ogniskowej f definiuje geometrię elipsoidy obrotowej wydłużonej, względem której określane są współrzędne krzywoliniowe μ , ν , ϕ .

4.4.3 Funkcje odwzorowawcze przestrzennego rozwinięcia chmur punktów sferycznych obiektów symetrycznych

Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów obiektu symetrycznego o powierzchni podstawowej sferycznej odbywa się w kilku etapach. Po pierwsze, do realizacji zadania konieczne jest określenie parametrów powierzchni pierwotnej. Są nimi współrzędne geometrycznego środka sfery x_0 , y_0 , z_0 oraz promień r . Względem wyznaczonej powierzchni pierwotnej określone zostaną wielkości odchyłeń poszczególnych punktów chmury (parametr głębokości). W kolejnym etapie położenie poszczególnych punktów chmury zostaje wyrażone w postaci współrzędnych krzywoliniowych sferycznych ϑ , φ oraz promienia r uwzględniających współrzędne środka sfery. Częstość przypadkiem jest występowanie niezerowych wartości współrzędnych środka sfery właściwe dla danego lokalnego układu współrzędnych chmury punktów. Zależności pomiędzy współrzędnymi ortokartezjańskimi x , y , z i krzywoliniowymi ϑ , φ i promieniem r wyrażają zależności:

$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right) \\ \theta = \arccos\left(\frac{z - z_0}{r}\right) \\ r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \end{cases} \quad (4.39)$$

gdzie:

x, y, z - współrzędne ortokartezjańskie punktu chmury,

x_0, y_0, z_0 - współrzędne ortokartezjańskie środka geometrycznego sfery.

W kolejnym etapie po przeprowadzonej parametryzacji współrzędne sferyczne punktów (ϑ , φ , r) stanowią argumenty funkcji odwzorowawczych przestrzennego rozwinięcia chmury punktów. Dysponując znaną długością promienia powierzchni pierwotnej (sfery) R następuje określenie lokalnych odchyłeń rzeczywistego przebiegu sklepień planetariów od założonego matematycznego

modelu. W celu uzyskania pożądanego czytelnej struktury przestrzennego rozwinięcia chmury punktów (obrazu) wykorzystuje się klasyczne funkcje odwzorowawcze znanych odwzorowań kartograficznych. Dobór odpowiedniego odwzorowania jest uwarunkowany konfiguracją przestrzenną chmury punktów. Przykładowo, dla zobrazowania obiektu w postaci jednej z hemisfer adaptuje się formuły odwzorowania azymutalnego równopolewego Lamberta [Pędzich, 2014]:

$$\begin{cases} x = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\varphi) \\ y = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\varphi), \\ h = r - R \end{cases} \quad (4.40)$$

gdzie R - promień powierzchni pierwotnej (sfery).

W przypadkach gdy chmura punktów obejmuje jedynie fragment powierzchni sferycznej warto stosować odwzorowanie Gaussa-Krügera [Gajderowicz, 2009]. Współrzędne horyzontalne (płaskie) wyznaczone są w przyjętym przez Gaussa geodezyjnym układzie współrzędnych z osią OX skierowaną w górę i pokrywającą się z południkiem osiowym strefy odwzorowawczej. Oś OY tworzy prawoskrętny układ płaski i skierowana w prawo jest współliniowa z obrazem równika. Współrzędna x zależy od długości łuku południka liczonej od równika, zaś współrzędna y od odległości kątowej punktu od południka osiowego strefy. Formuły odwzorowania przedstawione przez Gaussa dotyczą aproksymacji bryły Ziemi przez elipsoidę obrotową spłaszczoną [Gajderowicz, 2009]. Przyjmując za powierzchnię pierwotną sferę można ją potraktować jako szczególny przypadek elipsoidy obrotowej z zerową wartością pierwszego mimośrodu. Pierwszy mimośród, zgodnie z definicją nie jest wielkością liniową i wyraża jaką część długości dłuższej półosi elipsoidy obrotowej jest odległość każdego z ognisk od geometrycznego środka elipsoidy [Ayoub, 2003]. Pierwszy mimośród, podobnie jak spłaszczenie, dla jednoznacznego zdefiniowania geometrii elipsoidy obrotowej musi być zestawiony z odpowiednią wielkością liniową (długością dłuższej półosi elipsoidy).

Długość południka (oznaczona przez S) obliczana jest na podstawie całkowania długości promienia przekroju południkowego (M), będącego funkcją szerokości geodezyjnej punktu (B) oraz parametrów geometrycznych elipsoidy obrotowej (pierwszego mimośrodu e oraz długości dłuższej półosi a) [Różycki, 1978]:

$$S = \int_0^B M(B) dB = a(1 - e^2) \int_0^B \frac{1}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \sin^2(B))^3}} dB. \quad (4.41)$$

Uogólniony dwumian Newtona umożliwia obliczenie wartości sumy jedności i dowolnej zmiennej podniesionej do n -tej potęgi [Bronsztajn i Siemiendiajew, 2003]:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k. \quad (4.42)$$

Występujący we wzorze symbol Newtona odpowiada wyrażeniu:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}. \quad (4.43)$$

Symbol Newtona może być również wyrażony za pomocą następujących formuł:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k=0 \text{ lub } k=n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{dla } 0 < k < n \end{cases}. \quad (4.44)$$

Po rozwinięciu mianownika wyrażenia podcałkowego równania (4.41) uogólnionym dwumianem Newtona z zależności (4.42) długość łuku południka S przyjmuje następującą postać [Biernacki, 1973]:

$$S = a(1-e^2) \int_0^B \left(1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2(B) + \frac{15}{8}e^4 \sin^4(B) + \frac{35}{16}e^6 \sin^6(B) + \frac{315}{128}e^8 \sin^8(B) + \frac{693}{256}e^{10} \sin^{10}(B) + \dots \right) dB. \quad (4.45)$$

W celu uproszczenia wyrażenia podcałkowego zasadnym jest zastąpienie parzystych potęg sinusów sumą sinusów wielokrotności kąta za pomocą wzoru de Moivre'a dla liczb zespolonych [Bronsztejn i Siemiendiajew, 2003]:

$$\sin^n(x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \left[(-1)^{(n/2-k)} \binom{n}{k} \cos[(n-2k)x] \right]. \quad (4.46)$$

Po przekształceniach i uporządkowaniu równania względem funkcji cosinus długość południka S wyrażona jest następująco [Gajderowicz, 2009]:

$$S = a(1-e^2) \int_0^B (A^* - B^* \cdot \cos(2B) + C^* \cdot \cos(4B) + D^* \cdot \cos(6B) + E^* \cdot \cos(8B) + \dots) dB. \quad (4.47)$$

W przypadku sfery, pierwszy mimośród ma wartość równą zero. Powoduje to, że pomocnicze współczynniki przy cosinusach (będące funkcją mimośrodu) przyjmują wartości równe jedności (współczynnik A^*) oraz zer (współczynniki B^* , C^* , D^* , E^*). W wyniku całkowania wyrażenia podcałkowego uzyskuje się wartość równą szerokości geodezyjnej B punktu na sferze. Dodatkowo, biorąc pod uwagę, że odpowiednikiem dłuższej półosi elipsoidy obrotowej a jest promień R sfery oraz że pierwszy mimośród ma wartość zerową, długość łuku południka S odpowiada długości wycinka koła wielkiego sfery:

$$S = R \cdot B. \quad (4.48)$$

Przyjęcie za powierzchnię podstawową sfery zamiast elipsoidy obrotowej powoduje również redukcję niektórych współczynników powstałych po rozwinięciu w szereg Taylora funkcji konforemnego (wiernokątnego) odwzorowania Gaussa-Krügera [Biernacki, 1973], [Gajderowicz,

2009]. Po wprowadzeniu dodatkowych oznaczeń $Cx_1, Cx_2, Cx_3, Cy_1, Cy_2, Cy_3$, współrzędne płaskie odwzorowania wyznaczone są za pomocą następujących formuł:

$$\begin{cases} x_{GK} = S + Cx_1 + Cx_2 + Cx_3 \\ y_{GK} = Cy_1 + Cy_2 + Cy_3 \end{cases}, \quad (4.49)$$

gdzie:

$$\begin{cases} Cx_1 = \frac{l^2}{2R \sin(B) \cos(B)} \\ Cx_2 = \frac{l^4}{24R \sin(B) \cos^3(B) (5 - t^2)} \\ Cx_3 = \frac{l^6}{720R \sin(B) \cos^5(B) (61 - 58t^2 + t^4)} \end{cases}, \quad (4.50)$$

$$\begin{cases} Cy_1 = l \cdot R \cos(B) \\ Cy_2 = \frac{l^3}{6R \cos^3(B) (1 - t^2)} \\ Cy_3 = \frac{l^5}{120R \cos^5(B) (5 - 18t^2 + t^4)} \end{cases}. \quad (4.51)$$

Występujące we wzorach (4.50) i (4.51) wielkości t oraz l odpowiadają tangensowi szerokości geodezyjnej punktu oraz odległości kątowej punktu od południka osiowego:

$$\begin{cases} t = \tan(B) \\ l = L - L_0 \end{cases}. \quad (4.52)$$

Wszystkie wielkości kątowe we wzorach (4.41) – (4.52) wyrażone są w mierze łukowej (radianach). Przedstawiony algorytm pozwala na obliczenie współrzędnych w odwzorowaniu w ramach przyjętego wąskiego pasa południkowego. Ze wzorów (4.49) wynika, iż w różnych strefach (określonych przez południk osiowy) uzyskiwane będą jednakowe wartości współrzędnych (4.49). W celu przedstawienia całej powierzchni pierwotnej sfery niezbędne jest wprowadzenia czynnika wyróżniającego poszczególne jej strefy. Zadanie to zrealizowane zostaje poprzez ustalenie wartości liniowej, o jaką będą przesuwane poszczególne pasy odwzorowania. Wielkością tą, zgodnie z przyjętym w odwzorowaniu układzie współrzędnych będzie odległość skrajnego punktu strefy od południka osiowego na równiku. Będzie to jednocześnie maksymalna szerokość pasa i miejsce, gdzie nie występuje zniekształcenie obrazu równika i posiada on przebieg linii prostej [Pędzich, 2014]. Odległość elementarnego przesunięcia pasa strefy oblicza się za pomocą formuły:

$$\Delta y = l \cdot R + \frac{l^3}{6R} + \frac{l^5}{600R}. \quad (4.53)$$

Wartość parametru l obliczana jest dla połowy przyjętej szerokości strefy, tj. odległości kątowej pomiędzy południkiem osiowym i południkami ograniczającymi strefę. W rezultacie uzyskuje

się odległość Δy , która odpowiada odległości w odwzorowaniu pomiędzy punktem przecięcia południka osiowego i równika oraz punktu na równiku znajdującym się na granicy strefy.

Ostatecznie przestrzenne rozwinięcie chmury punktów obiektu sferycznego adaptujące zmodyfikowane formuły odwzorowania Gaussa-Krügera jest realizowane w następujący sposób:

$$\begin{cases} x = y_{GK} + \frac{2\Delta y}{\Delta L} \left(L_0 - \frac{\Delta L}{2} \right) \\ y = x_{GK} \\ z = r - R \end{cases}, \quad (4.54)$$

gdzie ΔL oznacza szerokość strefy przyjętą do zobrazowania powierzchni sfery. Warto odnotować zmianę w przestrzennym rozwinięciu układu geodezyjnego na klasyczny lewoskrętny matematyczny z osią OX skierowaną w prawo i osią OY skierowaną do góry.

4.4.4 Funkcje odwzorowawcze przestrzennego rozwinięcia chmur punktów elipsoidalnych wydłużonych obiektów symetrycznych

Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów, podobnie jak w poprzednim przypadku sferycznym, wymaga zdefiniowania powierzchni pierwotnej za pomocą parametrów opisanych w rozdziale 4.4.1. Wyznaczenie wartości odchylenia pomierzonego obiektu od referencyjnej elipsoidy obrotowej wydłużonej [Korn i Korn, 2017] odbywa się poprzez wyznaczenie współrzędnych krzywoliniowych μ , ν , φ na podstawie znanych współrzędnych ortokartezjańskich x , y , z punktów z chmury. Obliczenie na podstawie współrzędnych płaskich x , y wartości współrzędnej φ realizowane jest na podstawie geometrii trójkąta prostokątnego. Przy wyznaczaniu wartości pozostałych dwóch współrzędnych krzywoliniowych wykorzystuje się właściwość geometryczną linii parametrycznych, polegającą na występowaniu tych samych ognisk w przypadku elipsoid obrotowych spłaszczonych (współrzędna μ) oraz hiperboloid (współrzędna ν). Zgodnie z definicjami, ich powierzchnie tworzą punkty spełniające zależności [Arfken, 1970]:

$$r_1 + r_2 = \text{const. (dla stałego } \mu), \quad (4.55)$$

$$r_1 - r_2 = \text{const. (dla stałego } \nu), \quad (4.56)$$

gdzie r_1 , r_2 oznaczają odległości punktu od ognisk elipsoidy wydłużonej i hiperboloidy obliczane według następujących formuł:

$$r_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0 + f)^2}, \quad (4.57)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0 - f)^2}, \quad (4.58)$$

gdzie:

x, y, z – współrzędne punktu w przestrzeni trójwymiarowej,

x_0, y_0, z_0 – współrzędne geometrycznego środka elipsoidy,

f – ogniskowa elipsoidy.

Wartości funkcji współrzędnych krzywoliniowego układu współrzędnych elipsoidy obrotowej wydłużonej μ oraz ν określane są za pomocą następujących zależności [Arfken, 1970]:

$$\frac{r_1 + r_2}{2f} = \cosh(\mu), \quad (4.59)$$

$$\frac{r_1 - r_2}{2f} = \cos(\nu). \quad (4.60)$$

Z kolei wartości samych współrzędnych krzywoliniowych, po podstawieniu (4.57) i (4.58) do (4.59) i (4.60) oraz przeprowadzeniu stosownych przekształceń, wyznaczone są za pomocą formuł:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0+f)^2} + \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0-f)^2}}{2f} \right) \\ \nu = \operatorname{arccos} \left(\frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0+f)^2} - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0-f)^2}}{2f} \right) \\ \phi = \arctan \left(\frac{y-y_0}{x-x_0} \right) \end{array} \right. \quad (4.61)$$

Powierzchnia podstawowa odpowiadająca elipsoidzie obrotowej wydłużonej, stanowi powierzchnię referencyjną, względem której określane będą odchylenia rzeczywistego kształtu wyrażonego w postaci pomierzonej chmury punktów obiektu. W wyniku zastosowania metod geodezyjnego rachunku wyrównawczego otrzymuje się wartości parametrów geometrycznych charakteryzujących elipsoidę (współrzędne ortokartezjańskie punktu środkowego, długości półosi horyzontalnej oraz wertykalnej). Wielkości te należy odnieść do odpowiednich wartości współrzędnej μ oraz długości ogniskowej f , które w sposób właściwy dla krzywoliniowego układu współrzędnych μ, ν, ϕ definiują geometrię tej samej elipsoidy obrotowej wydłużonej (**Rys. 4.14**). Wyznaczenie wielkości referencyjnej μ_{ref} współwyznaczającej kształt elipsoidy następuje za pomocą wzoru:

$$\mu_{ref} = \operatorname{arccosh} \left(\frac{b}{f} \right). \quad (4.62)$$

Referencyjna wartość współrzędnej krzywoliniowej μ_{ref} jest funkcją dłuższej (wertykalnej) półosi elipsoidy obrotowej wydłużonej b oraz długości ogniskowej f .

Położenie każdego punktu w chmurze dane jest poprzez współrzędne ortokartezjańskie x, y, z . Przyjęcie układu krzywoliniowego wymaga wyznaczenia odpowiadających punktom odpowiednich współrzędnych μ, ν, ϕ . Współrzędne krzywoliniowe należy następnie odnieść do elipsoidy referencyjnej cechującą się stałą wartością współrzędnej $\mu = \mu_{ref}$ (4.62). Poszczególne punkty jedynie w pewnej części całej chmury punktów występują na powierzchni elipsoidy referencyjnej. W większości przypadków wartości współrzędnej μ uzyskiwanych dla poszczególnych punktów z chmury różnią się od wartości μ_{ref} . Różnica współrzędnych μ oraz μ_{ref} w przestrzennym rozwinięciu jest wykorzystana do wyznaczenia lokalnego odchylenia punktu od powierzchni pierwotnej. Pozostałe dwie współrzędne krzywoliniowe ν oraz ϕ zostają wykorzystane do wyrażenia lokalnej orientacji kątowej w płaszczyznach wertykalnej oraz horyzontalnej.

Poprzez zastosowanie formuł konwersji (4.61) uzyskuje się ze współrzędnych ortokartezjańskich współrzędne krzywoliniowe danego punktu z chmury. Znając wartość współrzędnej μ_{ref} powierzchni pierwotnej możliwe jest obliczenie współrzędnych krzywoliniowych punktu pomocniczego zrzutowanego na powierzchnię elipsoidy wzdłuż krzywej parametrycznej. Krzywą zrzutowania stanowi krawędź przecięcia się uzyskanych dla danego punktu współrzędnych ν oraz ϕ . Punkt pomocniczy, z racji przyjęcia wartości μ_{ref} , będzie należał do elipsoidy stanowiącej powierzchnię pierwotną (podstawową) badanego obiektu symetrycznego. Współrzędne krzywoliniowe ν i ϕ punktu zrzutowanego i pomocniczego będą miały te same wartości. Położenie referencyjnego punktu pomocniczego w ujęciu współrzędnych ortokartezjańskich wyznaczone jest na podstawie wzorów:

$$\begin{cases} x_{ref} = f \sinh(\mu_{ref}) \sin(\phi) \cos(\nu) \\ y_{ref} = f \sinh(\mu_{ref}) \sin(\phi) \sin(\nu) \\ z_{ref} = f \cosh(\mu_{ref}) \cos(\phi) \end{cases} \quad (4.63)$$

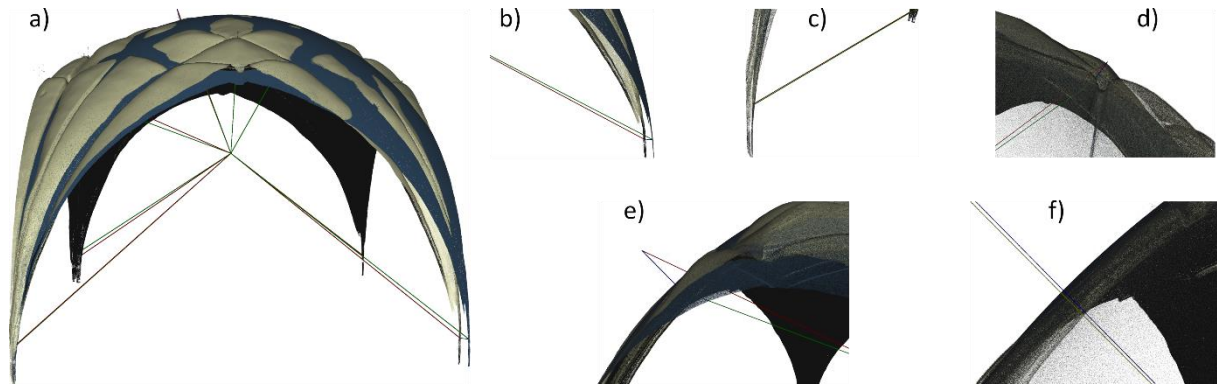
Dysponując współzrędnymi obu punktów, tj. właściwego punktu w chmurze (współzrędnymi x, y, z) oraz odpowiadającego mu punktu referencyjnego ($x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}$) wyznacza się liniową wartość lokalnego odchylenia obiektu od założonej powierzchni pierwotnej. Z definicji odległości są wartościami nieujemnymi. Należy zatem dodatkowo zdefiniować metodę określania, czy rozpatrywany punkt z chmury znajduje się powyżej czy poniżej powierzchni pierwotnej. Informację tę pozyskuje się na podstawie wartości współrzędnej krzywoliniowej μ wyznaczonej za pomocą formuły (4.61). Biorąc pod uwagę wartość charakterystyczną dla elipsoidy referencyjnej (μ_{ref}) występującą we współzrędnymi krzywoliniowych punktu pomocniczego jednoznacznie określa się znak towarzyszący odchyleniu d . Pozwala to na określenie położenia punktu w określonej relacji topologicznej względem powierzchni pierwotnej elipsoidy:

$$d = \begin{cases} \sqrt{(x - x_{ref})^2 + (y - y_{ref})^2 + (z - z_{ref})^2} & \text{dla } \mu \geq \mu_{ref} \\ -\sqrt{(x - x_{ref})^2 + (y - y_{ref})^2 + (z - z_{ref})^2} & \text{dla } \mu < \mu_{ref} \end{cases} \quad (4.64)$$

W rozdziale 4.4.3 zastosowano inny sposób wyznaczania liniowych wartości odchylenia punktu z chmury od sferycznej powierzchni pierwotnej. Wzór (4.40) wskazuje na porównywanie długości promienia sfery R ze współzrędną r punktu wyrażoną w przyjętym krzywoliniowym układzie współzrędnymi ϑ, ϕ, r . Zastosowana różnica odnosi położenie punktu do środka sfery. W przypadku elipsoidy obrotowej wydłużonej analogiczne podejście nie jest uprawnione, gdyż to odległość punktu od ognisk, a nie od punktu środkowego elipsoidy wskazuje na przynależność punktu do powierzchni bryły. Krzywoliniowy charakter linii parametrycznych układu współzrędnymi powoduje występowanie braku spełnienia warunku współliniowości przez trójkę punktów: ognisko elipsoidy, punkt pomocniczy zrzutowany oraz rozpatrywany punkt z chmury. **Rys. 4.18** prezentuje zasadę zastosowanego liniowego podejścia. Znajduje się na nim kilka wariantów położenia punktów cechujących z różnym stopniem separacji względem powierzchni pierwotnej na przykładzie sklepienia kryształowego budynku sakralnego.

Punkty tworzące chmurę punktów zostały oznaczone kolorem żółtym. Wyznaczona na ich podstawie metodami geodezyjnego rachunku wyrównawczego powierzchnia pierwotna (elipsoida obrotowa) posiada kolor niebieski. Na ilustracji widoczne jest wzajemne przenikanie się obu zbiorów danych przestrzennych, co dowodzi występowaniu lokalnych odchyień rzeczywistego kształtu prezentowanego obiektu od założonego idealnego kształtu bryły referencyjnej. Liniami w kolorze

czerwonym oznaczono odcinki pomiędzy ogniskiem elipsoidy a wybranymi pomierzonymi punktami z chmury. Linie w kolorze zielonym reprezentują analogiczny odcinek dla zrzutowanego na powierzchnię elipsoidy punktu pomocniczego. W każdym z przedstawionych przypadków (**Rys. 4.18 b, c, d, e, f**) widoczna jest niewspółliniowość obu punktów i ogniska elipsoidy. Niezasadne jest zatem określanie wielkości odchylenia na drodze różnicy dwóch wymienionych długości.



Rys. 4.18. Odchylenia liniowe i krzywoliniowe wybranych punktów chmury (kolor żółty) względem przyjętej powierzchni pierwotnej (kolor niebieski).

Każda z par odpowiadających sobie punktów (pomierzony i pomocniczy referencyjny), zgodnie z zależnościami (4.64) posiadają jednakowe wartości współrzędnych v oraz φ i różnią się wartością współrzędnej μ . Tym samym oba punkty położone są na jednej krzywej parametrycznej powstałej z przecięcia półpłaszczyzny odpowiadającej współrzędnej φ oraz hiperboloidzie odpowiadającej współrzędnej v (**Rys. 4.15** i **Rys. 4.17**). Z przecięcia hiperboloidy i półpłaszczyzny powstaje połowa hiperboli, która dla przedstawianych na rysunku wartości odchyżeń kilku punktów od powierzchni elipsoidy, ma przebieg zbliżony do liniowego. Uproszczenie takie można zastosować, gdyż nawet w przypadku większych separacji punktu chmury od powierzchni pierwotnej uzyskiwane są zanedbywalne różnice pomiędzy odległością wyliczoną ze współrzędnych, a odległością liczoną wzdłuż krzywej (**Rys. 4.18**). Przedstawiony na **Rys. 4.18 e** punkt z chmury stanowi oddalony od powierzchni sklepienia element szumu (skutek wystąpienia podczas pomiaru błędów przypadkowych lub/i systematycznych), który na etapie wstępnego opracowania najczęściej jest eliminowany z chmury punktów. Przebieg krótkich fragmentów krzywoliniowej hiperboloidy można przyjąć jako prostoliniowy. Przebieg krzywej (kolor beżowy) oraz przebieg odcinka wskazującego liniowe odchylenie punktu (kolor niebieski) został przedstawiony na **Rys. 4.18 f**.

Każdemu punktowi w chmurze na drodze zaprezentowanej procedury można przyporządkować współrzędne krzywoliniowe μ , v , φ oraz wartość odchylenia względem powierzchni pierwotnej d (parametr głębokości). Zważywszy, że rozkład linii parametrycznych na elipsoidach obrotowych (odpowiadających wartościom współrzędnej krzywoliniowej μ) jest równomierny, to współrzędne v oraz φ można potraktować analogicznie jak współrzędne sferyczne lub elipsoidalne i poddać je przekształceniu adaptującemu formuły klasycznego odwzorowania kartograficznego. Współrzędne v oraz φ stanowią będą w tym przypadku odpowiedniki współrzędnych szerokości i długości geodezyjnej. Z racji charakterystycznego wertykalnego charakteru sklepień (chmury punktów znajdują się w górnej części elipsoidy), zasadnym jest stosowanie odwzorowań przedstawiających obszary okołobiegunowe, np. odwzorowania azymutalne równopolewego Lamberta [Pędzich, 2014]. Przyjąwszy zaproponowane rozwiązanie, funkcje przestrzennego rozwinięcia chmury punktów elipsoidalnego obiektu symetrycznego przyjmują postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2R \sin\left(\frac{\nu}{2}\right) \cos(\varphi) \\ y = 2R \sin\left(\frac{\nu}{2}\right) \sin(\varphi) . \\ h = d \end{array} \right. \quad (4.65)$$

Adaptacja klasycznych formuł odwzorowania polega na odpowiednim przeliczeniu współrzędnych krzywoliniowych ν definiujących kąty w płaszczyznach wertykalnych. Konwencja przyjęta w geodezji zmienia sposób odmierzenia kąta z kierunku od bieguna północnego do południowego (sytuacja obecna w przypadku układu współrzędnych krzywoliniowych μ, ν, φ) do przyjętego w geodezji i kartografii kierunku przeciwnego (kąąt narasta w kierunku północnym i przyjmuje wartość zerową w płaszczyźnie równika).

5 Algorytmy metody najmniejszych kwadratów w przestrzennych rozwinięciach chmur punktów

5.1 Wpasowanie okręgu w zbiór punktów z zastosowaniem metod M-estymacji

Podstawowym problemem w prezentowanej strategii obliczeniowej jest określenie środka przekroju chmury punktów symetrycznego obiektu walcowego. Często spotykaną cechą tych obiektów jest ich wertykalna orientacja (np. budowle wieżowe, kominy). W celu zapewnienia równomiernego pokrycia zewnętrznej powierzchni pomierzonymi punktami, konieczne jest przeprowadzenie skanowania laserowego ze stanowisk rozmieszczonych wokół obiektu. Niekiedy warunki terenowe uniemożliwiają realizację tego celu (np. poprzez przyleganie komina do jednej ze ścian budynku). W takich przypadkach przekrój poprzeczny przez chmurę punktów cechuje się nierównomiernym rozmieszczeniem punktów. Dodatkowym czynnikiem jest występowanie szumów w postaci punktów reprezentujących elementy towarzyszące walcowemu obiektowi symetrycznemu (np. drabiny). Zaburzenia zasadniczego kształtu przekroju poprzecznego wpływają na wynik wpasowania metodą najmniejszych kwadratów (MNK) i powodują uzyskiwanie niewłaściwych współrzędnych środka oraz błędnej długości promienia okręgu. Z tego powodu istotnym zagadnieniem jest dobór optymalnej metody wpasowania okręgu w zbiór punktów, a tym samym poprawne wyznaczenie jego parametrów geometrycznych.

W teorii opracowywania obserwacji na ogół zakłada się, że obserwacje są realizacją zmiennej losowej $Y \sim P_x$. Wówczas najlepsze wpasowanie okręgu w zbiór punktów gwarantuje metoda najmniejszych kwadratów [Gander i in., 1994]. Przy opracowywaniu chmur punktów może jednak wystąpić sytuacja, gdy jedna lub większa liczba obserwacji y_i posiada inny parametr rozkładu prawdopodobieństwa, aniżeli pozostałe obserwacje, lub należy do akceptowalnej rodziny rozkładów prawdopodobieństwa, ale o znacznie różniącym się odchyleniu standardowym [Wiśniewski, 2013]. W literaturze przedmiotu wyniki pomiarów o takich własnościach określa się mianem obserwacji odstających. W takiej sytuacji zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do opracowania wyników pomiarów generuje znaczne błędy z powodu dużej wrażliwości metody na obserwacje odstające [Guo i in., 2010]. Dlatego też, wpływ obserwacji odstających na ostateczne rezultaty estymowanych wartości musi być usunięty lub co najmniej zminimalizowany. Poza najprostszym rozwiązaniem polegającym na usunięciu odpowiednich punktów z przekroju istnieją również metody wyrównania wykrywające i eliminujące wpływ szumu na rezultat estymacji. Obecnie do tego celu najczęściej wykorzystywane są metody nawiązujące do zasad odpornej M-estymacji [Kamiński i Wiśniewski, 2002], [Yang i in., 2002], [Ge i in., 2013]. Ograniczenie wpływu obserwacji odstających na ostateczny rezultat wyrównania następuje poprzez zastosowanie odpowiednich funkcji wagowych np. Hubera lub duńskiej.

W niniejszym rozdziale zaprezentowany zostanie wpływ wystąpienia obserwacji odstających na wyznaczenie środka okręgu wpasowanego metodą najmniejszych kwadratów w chmurę punktów przekroju. Dodatkowo zostanie zaproponowana odporna strategia wpasowania z zastosowaniem metod odpornej M-estymacji. Należy zaznaczyć, że przedstawione analizy empiryczne mają charakter przybliżony ze względu na przeprowadzoną estymację parametrów w klasycznych modelach geodezyjnych obserwacji. Obecnie, bardziej szczegółowe podejścia prowadzone są poprzez estymację parametrów w modelach typu Errors-in-Variable (EIV) [Van Huffel i Lemmerling, 2013], [Söderström, 2007]. Z zastosowaniem estymacji w modelach EIV przeprowadzono natomiast wpasowanie prostej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej w rozdziale 5.2.

5.1.1 Podstawy teoretyczne metod M-estymacji

W teorii estymacji zazwyczaj przyjmuje się funkcjonalny model obserwacji o liniowej, bądź zlinearyzowanej postaci [Wiśniewski, 2013]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.1)$$

o wartości oczekiwanej $E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ jest wektorem obserwacyjnym zawierającym obserwacje y_i , $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n,r}$ jest macierzą znanych współczynników o r liniowo niezależnych kolumnach, $\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^r$ jest wektorem wyznaczanych parametrów, $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathfrak{R}^n$ jest wektorem losowym błędów pomiaru, a $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}^n$ jest wektorem teoretycznych poprawek obserwacyjnych. Na potrzebę przeprowadzanych analiz założmy, że wyniki pomiarów są zmiennymi zależnymi nieskorelowanymi. Wówczas macierz kowariancji wyników pomiarów jest macierzą diagonalną o następującej postaci:

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} V(y_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V(y_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V(y_n) \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

gdzie jako $V(y_i)$ oznaczono wariancję i -tej obserwacji. W praktyce wartości elementów diagonalnej macierzy (5.2) nie są znane i na ogół zastępowane są oszacowaniami a priori wariancji w postaci kwadratów błędów średnich pomiaru $\sigma_{y_i}^2 = \hat{V}(y_i)$. Wówczas model statystyczny można zapisać jako

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{y_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{y_n}^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}, \quad (5.3)$$

gdzie σ_0^2 oznacza współczynnik wariancji, a $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{n,r}$ jest diagonalną macierzą wag o postaci:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{y_2}^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{y_n}^{-2} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Teoria M-estymacji jest uogólnieniem metody największej wiarygodności [Huber, 1964]. Istotą metody, jest wyznaczenie M-estymatorów minimalizujących poniższą funkcję celu:

$$\varphi(\mathbf{y}; \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \rho(y_i; \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \rho(v_i), \quad (5.5)$$

gdzie $\rho(y_i; \mathbf{X})$ jest pewną funkcją niekoniecznie wynikającą z probabilistycznych własności zmiennych [Hampel i in., 1986]. Zakładając, że funkcja $\rho(y_i; \mathbf{X})$ jest różniczkowalna, rozwiązanie kryterium optymalizacyjnego $\sum_{i=1}^n \rho(v_i) = \min$ następuje poprzez rozwiązanie równania:

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{y}; \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = 0. \quad (5.6)$$

Wyznaczając gradient funkcji celu (5.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{y}; \mathbf{X}) &= \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{y}; \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]^T = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \sum_{i=1}^n \rho(v_i) \right]^T = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho(v_i)}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{X}} \right]^T = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \psi(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{X}} \right]^T = \mathbf{A}^T [\psi(v_1, \dots, v_n)]^T = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

można zapisać, że M-estymatorami są wartości $\hat{\mathbf{X}}$ spełniające następujący układ równań:

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}) = 0 \quad (5.8)$$

Wyrażenia $\psi(v_i)$ występujące w formułach (5.7) i (5.8), mogą być utożsamiane jako funkcje proporcjonalne do opisanej przez Hampela funkcji wpływu $IF(y_i; \mathbf{X})$ [Hampel, 1974]. Ze względu na istniejącą proporcjonalność funkcji $IF(y_i; \mathbf{X})$ i $\psi(v_i)$, funkcja $\psi(v_i)$ w literaturze przedmiotu określana jest terminem funkcji wpływu [Wiśniewski, 2014], [Wiśniewski, 2016]. Funkcja IF jest szczególnie istotna na etapie projektowania estymatorów oraz w interpretacji ich teoretycznych własności. Funkcja IF opisuje wpływ wystąpienia błędu grubego w zbiorze obserwacyjnym na wynik estymowanych wielkości [Hampel, 1974], [Rousseeuw i Ronchetti, 1981]. Na podstawie funkcji wpływu ustalana jest konkretna postać funkcji wagowej:

$$w(v_i) = \frac{\partial \rho(v_i)}{\partial v_i^2} = \frac{\psi(v_i)}{2v_i} \quad (5.9)$$

Przykładowo, w metodzie najmniejszych kwadratów, przy funkcji celu $\varphi_{MKN}(\mathbf{y}; \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2$, funkcja wagowa przyjmuje postać $w_{MKN} = p_i$. Tym samym metoda najmniejszych kwadratów należy do rodziny neutralnych metod estymacji [Kadaj, 1988].

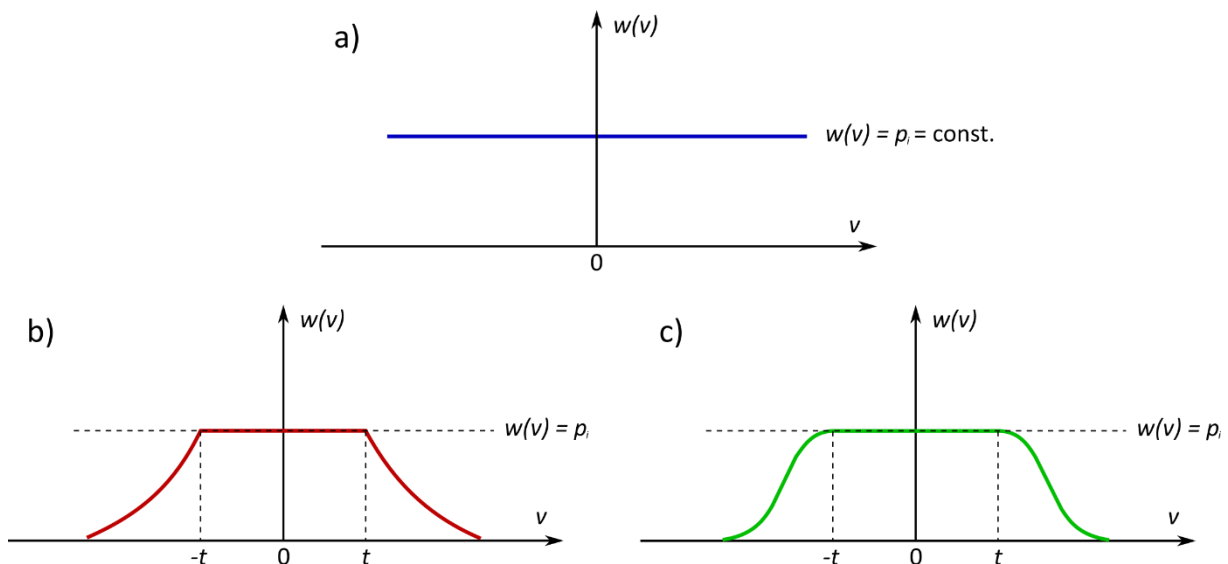
Funkcja wagowa odgrywa szczególnie istotną rolę w kontekście odpornościowym. Zakładając, że rozwiązanie zadania wyrównawczego nastąpi w procesie iteracyjnym, to funkcja wagowa w każdym cyklicznym powtórzeniu definiuje sposób, w jaki będą modyfikowane oryginalne wagi obserwacji y_i . W każdym kroku iteracyjnym nowa waga obserwacji określana jest w odniesieniu do bezwzględnej wartości estymatora \hat{v}_i . Poszczególne M-estymatory różnych metod różnią się sposobem ustalania zmodyfikowanych wag obserwacji. Do najbardziej skutecznych funkcji wagowych eliminujących wpływ błędów grubych na wyniki wyrównania należy funkcja duńska [Krarup i Kubik, 1983], [Kamiński i Wiśniewski, 1992]:

$$w(v_i) = \begin{cases} p_i & \text{dla } |\bar{v}_i| \leq t \\ e^{-|\bar{v}_i - t|^g} p_i & \text{dla } |\bar{v}_i| > t \end{cases}. \quad (5.10)$$

Wielkości l oraz g są interpretowane są jako parametry sterujące i mają istotny wpływ na długość oraz skuteczność procesu iteracyjnego. W funkcji wagowej (5.10) parametr t określa przedział dopuszczalny $\Delta_{v_i} = \langle -t; t \rangle$ dla standaryzowanych poprawek obserwacyjnych $\bar{v}_i = \hat{v}_i / \sigma$. Jeżeli standaryzowana poprawka \bar{v}_i znajdzie się poza przedziałem akceptowalnych wartości błędów pomiaru, to w kolejnych krokach iteracyjnych waga i -tej obserwacji p_i zostanie zredukowana do wartości eliminującej wpływ obserwacji y_i na ostateczne rezultaty przeprowadzonej estymacji. Wartość parametru t na ogół przyjmuje się jako 1.5, 2, 2.5 lub 3. W niniejszej rozprawie rozważona zostanie funkcje wagowa metody Hubera [Ge i in., 2013], [Zienkiewicz i Czuplewski, 2017]:

$$w(v_i) = \begin{cases} p_i & \text{dla } |\bar{v}_i| \leq t \\ \frac{t}{|\bar{v}_i|} p_i & \text{dla } |\bar{v}_i| > t \end{cases}. \quad (5.11)$$

Graficzne interpretacje funkcji wagowych wymienionych metod estymacji przedstawiono na **Rys. 5.1**.



Rys. 5.1. Funkcje wagowe metody najmniejszych kwadratów (a), metody Hubera (b) i metody duńskiej (c).

Stosując ogólną postać funkcji wagowej (5.9), równanie (5.8) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{w}(\mathbf{v}) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (5.12)$$

gdzie $\mathbf{w}(\mathbf{v}) \mathbf{v}$ jest diagonalną macierzą funkcji wagowych. Rozwiązaniem równania (5.6) jest M-estymator wektora parametrów \mathbf{X} o następującej postaci:

$$\mathbf{X}^j = [\mathbf{A}^T \mathbf{w}(\mathbf{v}^{j-1}) \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{w}(\mathbf{v}^{j-1}) \mathbf{y}, \quad (5.13)$$

gdzie poprzez $j = 1, \dots, c$ oznaczono numer kroku iteracyjnego w procesie wyznaczania M-estymatora.

Każdej dowolnie wybranej funkcji wpływu (a tym samym również każdej funkcji wagowej) odpowiada inny M-estymator. Przykładowo, jeżeli przyjmiemy, że macierz funkcji wagowych ma postać $\mathbf{w}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}$, to otrzymany M-estymator jest jednocześnie estymatorem metody najmniejszych kwadratów minimalizujący funkcję celu $\varphi_{MKN}(\mathbf{y}; \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2$ i posiada następującą postać:

$$\hat{\mathbf{X}}_{MKN} = [\mathbf{A}^T \mathbf{w}(\mathbf{v}) \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{w}(\mathbf{v}) \mathbf{y} = [\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y}. \quad (5.14)$$

W M-estymacji do analogicznego rozwiązania prowadzi przyjęcie założenia, że wynik pomiaru y_i ma normalny rozkład prawdopodobieństwa [Wiśniewski, 2014].

Z formuły (5.10) wynika, że wartości duńskiej funkcji wagowej są modyfikacjami oryginalnych wag obserwacji występujących w algorytmie obliczeniowym estymatorów metody najmniejszych kwadratów, które mogą być zastosowane jako wartości inicjujące iteracyjny proces wyznaczania odpornych M-estymatorów. Co więcej, funkcję wagową i -tej obserwacji w odpornej M-estymacji można zapisać również z zastosowaniem funkcji tłumienia $w(v_i) = p_i t(v_i) = \bar{p}_i$, gdzie \bar{p}_i jest ekwiwalentną wagą i -tej obserwacji w danym kroku iteracyjnym [Czaplewski i Wiśniewski, 2008]. Wówczas w procesie iteracyjnym (5.13) występuje ekwiwalentna macierz wag:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{p}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{p}_n \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

będąca modyfikacją funkcji wagowej $\mathbf{w}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}$ powstającą wskutek zastosowania wybranej funkcji tłumienia, np. duńskiej:

$$w(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |v_i| \leq t \\ e^{-|v_i - t|^s} & \text{dla } |v_i| > t \end{cases} \quad (5.16)$$

lub Hubera:

$$w(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |v_i| \leq t \\ \frac{t}{|v_i|} & \text{dla } |v_i| > t \end{cases}. \quad (5.17)$$

Proces iteracyjny wyznaczania M-estymatora (5.13) można uznać za zakończony, gdy w c -tym kroku iteracyjnym otrzymany M-estymator $\hat{\mathbf{X}}$ spełnia równanie (5.8), a macierz tłumienia jest macierzą jednostkową:

$$\mathbf{t}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} t(v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t(v_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t(v_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Jak zostało to już wcześniej wspomniane, w praktyce odchylenie standardowe σ nie jest znane i na ogół jest zastępowane błędem średnim mierzonej wielkości. Z tego powodu, również standaryzację poprawek przeprowadza się na podstawie wyznaczanych błędów średnich poprawek $v_i = \hat{v}_i / \sigma_{v_i}$. Macierz kowariancji wektora $\hat{\mathbf{v}}$ ma następującą postać [Wiśniewski, 2014]:

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}} = m_0^2 [\hat{\mathbf{P}}^{-1} - \mathbf{A} [\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T]. \quad (5.19)$$

gdzie elementami przekątnej macierzy są kwadraty błędów średnich, a poprzez $m_0^2 = \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{P}} \mathbf{v} / (n - m)$ oznaczono estymator współczynnika wariancji. Wielkość m_0^2 może być również zakłócona przez obserwacje odstające, co w konsekwencji może doprowadzić do niepoprawnej identyfikacji błędów grubych. W takich przypadkach stosuje się m.in. odporną estymację współczynnika wariancji [Wiśniewski, 1999]. W rozprawie zastosowano inne rozwiązanie występujące w literaturze i polegające na przyjęciu w wyrażeniu (5.19) teoretycznej wartości estymatora współczynnika wariancji $m_0^2 = 1$ [Wiśniewski, 2013].

5.1.2 Test numeryczny

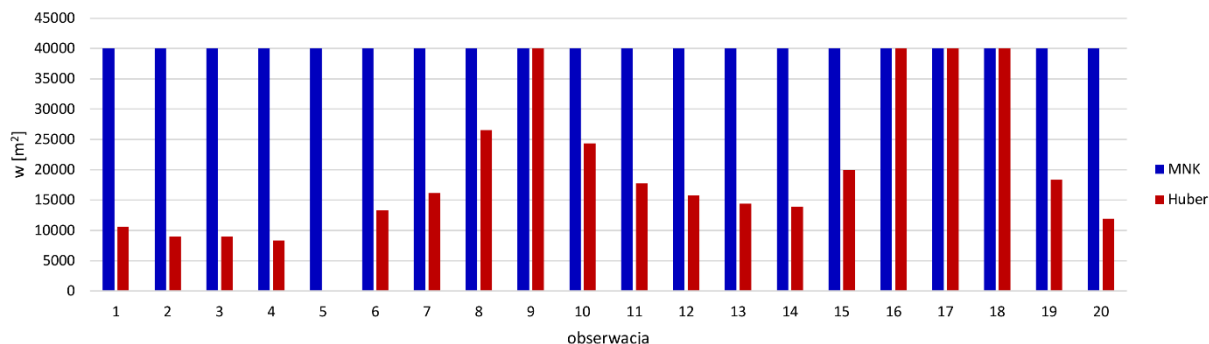
Rozdział podzielono na dwie części. W pierwszej z nich wykorzystano symulowane dane z jedną obserwacją odstającą. W obliczeniach zastosowano dwie metody estymacji: metodę najmniejszych kwadratów oraz metodę odporną Hubera. Na podstawie zbioru punktów zostaną wyznaczone parametry okręgów w postaci współrzędnych horyzontalnych x , y środka oraz promień r . Uzyskane rezultaty będą przedstawiały właściwości obu metod. Współrzędne punktów zostały wygenerowane w regularnych odstępach kątowych na okręgu i zaburzone błędem o rozkładzie normalnym. Jednemu z punktów został przyporządkowany dodatkowy błąd gruby, który nadał punktowi cechę obserwacji odstającej (punkt piąty w **Tab. 5.1**).

Tab. 5.1. Współrzędne horyzontalne punktów wygenerowanych punktów okręgu.

Lp.	x [m]	y [m]	Lp.	x [m]	y [m]	Lp.	x [m]	y [m]
1	0.1990	-0.0035	8	-0.1174	0.1539	15	-0.0693	-0.1868
2	0.1860	0.0659	9	-0.1649	0.1144	16	-0.0041	-0.1919
3	0.1656	0.1126	10	-0.1960	0.0610	17	0.0567	-0.1772
4	0.1114	0.1572	11	-0.2030	-0.0051	18	0.1128	-0.1623
5	0.3443	0.1959	12	-0.1878	-0.0708	19	0.1557	-0.1195
6	0.0078	0.2029	13	-0.1668	-0.1133	20	0.1856	-0.0589
7	-0.0583	0.1876	14	-0.1173	-0.1671			

Na podstawie współrzędnych punktów utworzono 20 równań obserwacyjnych wykorzystując zależności geometryczne okręgu oraz wprowadzając dodatkowe parametry pomocnicze ζ_1 , ζ_2 i ζ_3 (4.1) - (4.3). Współczynniki występujące przy parametrach pomocniczych tworzą macierz współczynników \mathbf{A} . Macierz wyrazów wolnych \mathbf{L} tworzą wartości znajdujące się po prawej stronie równania (4.2). Diagonalnymi współczynnikami macierzy wag (wagami obserwacji) była odwrotność kwadratu błędu położenia punktu na okręgu przyjętego arbitralnie jako $m_x = m_y = 0.005$ m. Zgodnie z treścią rozdziału 5.1.1, do zastosowania metody odpornej Hubera konieczne jest przeprowadzenie wyrównania metodą najmniejszych kwadratów. Wektor niewiadomych \mathbf{X} został wyznaczony zgodnie z formułą (4.8). Z otrzymanych estymatorów parametrów pomocniczych obliczono współrzędne środka okręgu x_c , y_c oraz długość promienia r , które stanowią zarówno wynik estymacji metodą najmniejszych kwadratów, jak również wielkości inicjujące metodę Hubera.

Kolejnym etapem było przyjęcie macierzy wag metody najmniejszych kwadratów do obliczeń iteracyjnych. W wyniku kolejnych powtórzeń i stosowania funkcji tłumienia metody Hubera (5.17) uzyskiwane są kolejne ekwiwalentne macierze wag (5.15). W obliczeniu przeprowadzono 50 iteracji macierzy wag. Uzyskane wartości wag dla wszystkich 20 obserwacji w metodzie najmniejszych kwadratów i metodzie odpornej Hubera przedstawiono na **Rys. 5.2**.

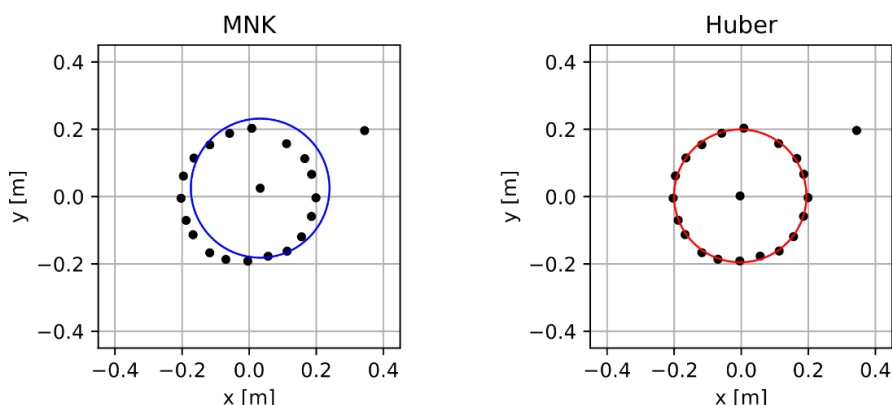


Rys. 5.2. Wartości diagonalnych współczynników macierzy wag wykorzystane w metodzie MNK i odpornej Hubera.

Wagi w metodzie kwadratów mają jednakową wartość (kolor niebieski). Wagi w metodzie odpornej Hubera, na skutek 50-krotnej iteracji, uzyskały zróżnicowane wartości (kolor czerwony). Na szczególną uwagę zasługuje waga obserwacji piątej w metodzie odpornej. Przyjmuje ona wartość bliską zero, stąd wpływ tej obserwacji na ostateczny wynik wyrównania jest zaniedbywalny lub całkowicie zredukowany. W efekcie wpasowanie okręgu odbywa się we wszystkie punkty ze zbioru poza wspomnianym punktem odstającym. Wyniki wyrównania w obu metodach przedstawiono w **Tab. 5.2** i na **Rys. 5.3**.

Tab. 5.2. Współrzędne środka oraz promień okręgu wyznaczone metodą MNK i odporną Hubera.

	x [m]	y [m]	r [m]
MNK	0.0328	0.0251	0.2066
Huber	-0.0029	0.0020	0.1973



Rys. 5.3. Wyniki wpasowania okręgu w zbiór punktów przeprowadzone metodą MNK i odporną Hubera.

Zarówno w tabeli, jak i na rysunku widoczny jest wpływ obserwacji odstającej na rezultat wyrównania metodą najmniejszych kwadratów. Środek wyznaczonego okręgu w wyraźny sposób jest przesunięty

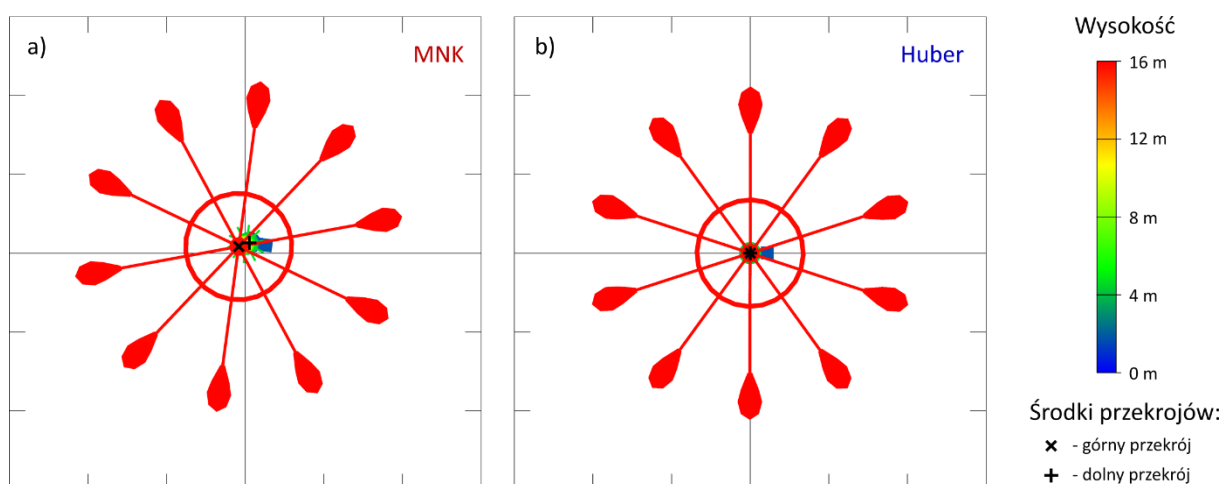
w stronę punktu odstającego. Z kolei metoda odporna Hubera spowodowała wykrycie obserwacji odstającej i wyeliminowanie jej wpływu na ostateczny rezultat wpasowania. Tym samym jej zastosowanie jest zasadne w przypadku przekrojów poprzecznych chmury punktów, które w niektórych przypadkach posiadają punkty nie wchodzące w skład zasadniczego okrągłego kształtu przekroju.

Przydatność metody w przestrzennych rozwinięciach sprawdzono na przykładzie chmury punktów pochyłej latarni ulicznej. W pierwszym etapie analizy wyselekcjonowano dwa przekroje poprzeczne u podstawy latarni i na szczycie podpory. Na podstawie dwóch zbiorów punktów wyznaczono parametry osi w postaci współrzędnych horyzontalnych x , y środków okręgów oraz ich promieni r . Wysokość punktów środkowych okręgu została przyjęta z wysokości przekrojów poprzecznych chmury. Wykorzystano dwie metody estymacji: metodę najmniejszych kwadratów oraz metodę wyrównania odpornego Hubera. Dla obu przypadków przeprowadzono niezależnie wyznaczenie położenia pochyłej osi rozwinięcia (4.25) - (4.26) oraz przestrzenne rozwinięcie chmury punktów na pobocznice walca o promieniu 2.15 m (4.30). Parametry pionizacji chmury punktów w oparciu o uzyskane współrzędne środków okręgów przedstawiono w **Tab. 5.3**.

Tab. 5.3. Dane przestrzenne definiujące przebieg procesu pionizacji chmury punktów.

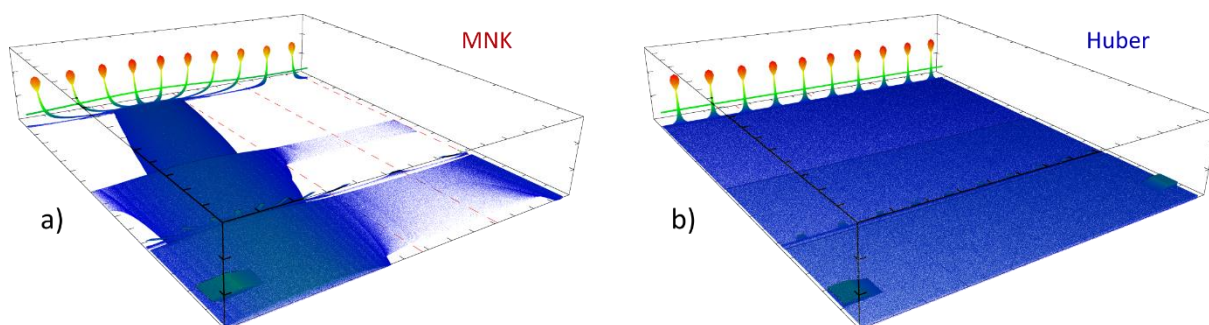
	P_0			P_1			V			α	β
	x [m]	y [m]	z [m]	x [m]	y [m]	z [m]	x [m]	y [m]	z [m]	[°]	[°]
MNK	0.204	0.011	0.07	-0.104	-0.372	15.78	-0.308	-0.383	15.71	-128.7763	88.2070
Huber	0.272	-0.113	0.07	0.013	-0.360	15.78	-0.259	-0.247	15.71	-136.3138	88.6955

Z powodu występowania w obu przekrojach obserwacji odstających, w metodzie najmniejszych kwadratów i w metodzie odpornej Hubera uzyskano różne współrzędne środków okręgów. W konsekwencji wektory wypadkowy właściwe dla obu metod posiadają inne współrzędne, co z kolei wpływa na wyznaczone wartości kątów rotacji chmury punktów wokół osi OZ i OY . Różne kąty rotacji (4.25) - (4.26) oraz różne współrzędne wektora translacji (4.24) wpływają na przestrzenną orientację chmury punktów po zakończonej pionizacji (4.27). Rezultaty pionizacji uzyskane dla wyników metody najmniejszych kwadratów i metody odpornej Hubera przedstawiono na **Rys. 5.4**.



Rys. 5.4. Wyniki procesu pionizacji chmury punktów przeprowadzonej na podstawie wyników wyrównania metodą MNK (a) i odporną Hubera (b).

Środki przekrojów wyznaczone metodą nieodporną (metodą najmniejszych kwadratów) spowodowały nie wskazały prawidłowego przebiegu osi konstrukcyjnej (**Rys. 5.4 a**). Obserwacje odstające przyczyniły się do ekscentrycznego jej położenia i nieskutecznego rezultatu procesu pionizacji chmury punktów. Metoda odporna Hubera wykryła obserwacje odstające w zbiorze punktów, co pozwoliło na prawidłową identyfikację pochyłej osi konstrukcyjnej latarni ulicznej (punkty środkowe przekroju dolnego i górnego posiadają jednakowe współrzędne horyzontalne – **Rys. 5.4 b**). Rezultaty wyznaczenia środków okręgów metodą najmniejszych kwadratów zostały zaburzone obserwacjami odstającymi, które spowodowały, że chmura punktów (4.24) nie została przesunięta do początku układu współrzędnych. Stąd wyznaczone kąty rotacji (4.25) - (4.26) spowodowały niepionowe położenie chmury punktów (**Rys. 5.4 b**). W celu przedstawienia wpływu niepoprawnej identyfikacji środków przekrojów w ostatnim etapie analizy wykonano przestrzenne rozwinięcia spionizowanych chmur punktów (**Rys. 5.5**).



Rys. 5.5. Wyniki przestrzenne rozwinięcia chmur punktów spionizowanych w oparciu o wyniki wyrównania metodą MNK (a) i odporną Hubera (b).

Przestrzenne rozwinięcie bazujące na metodzie odpornej Hubera posiada postać, która w prawidłowy sposób przedstawia strukturę geometryczną latarni ulicznej (**Rys. 5.4 b**). Drugie rozwinięcie stworzone na podstawie wyników wyrównania metodą najmniejszych kwadratów nie jest poprawne (**Rys. 5.4 a**). Na ilustracji widoczne jest pochylenie teoretycznie spionizowanej chmury punktów (ukośny przebieg rozwiniętej podpory latarni oraz ekscentryczność osi rozwinięcia).

Metoda wyrównania odpornego Hubera wykryła i zminimalizowała wpływ obserwacji odstających w dolnym i górnym przekroju poprzecznym chmury punktów. Dzięki temu prawidłowo wyznaczono środki okręgów z dwóch zbiorów punktów oraz współrzędne wektora wskazującego przebieg pochyłej osi konstrukcyjnej latarni. W prowadzonych równolegle obliczeniach metodą najmniejszych kwadratów odnotowano dużą wrażliwość na obserwacje odstające, która spowodowała wyznaczenie nieprawidłowych współrzędnych środków okręgów w przekrojach. W efekcie uzyskano nieprawidłowe parametry wychylenia osi konstrukcyjnej (współrzędne wektora). Wpływ dwóch metod estymacji na ostateczną postać przestrzenne rozwinięcia dowodzi zasadności stosowania odpornych metod estymacji. Warto odnotować, że położenie osi rozwinięcia wyznaczono na podstawie dwóch punktów znajdujących się u podstawy i na szczycie walcowej podpory latarni. W kolejnym rozdziale zostanie przedstawione wyznaczenie parametrów osi konstrukcyjnej bazujące na większej liczbie punktów pochodzących z przekrojów poprzecznych wygenerowanych z zadaniem interwałem.

5.2 Wpasowanie prostej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej z zastosowaniem totalnej metody najmniejszych kwadratów

5.2.1 Wpasowania prostej w zbiór punktów trójwymiarowych

Zagadnienia przedstawione w niniejszym rozdziale zostały zaimplementowane z pracy [Snow i Schaffrin, 2016], w której to analizowano problem wpasowania linii prostej w zbiór pomierzonych punktów w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Rozwiązanie tego problemu przeprowadzono minimalizując sumę kwadratów wszystkich błędów losowych w obserwacjach oraz wyznaczając najmniejszą z możliwych liczbę parametrów, definiujących przebieg prostej w przestrzeni 3D. Dodatkowo autorzy przeprowadzili estymację parametrów prostej z uwzględnieniem losowych błędów nie tylko w wektorze obserwacji, ale także w macierzy projektu. W piśmiennictwie geodezyjnym, tego typu rozwiązania noszą nazwę estymacji parametrów w modelach typu Errors-in-Variable z zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów, bądź totalnej metody najmniejszych kwadratów [Prószyński, 2013]. Inny sposób wpasowania prostej w przestrzeni trójwymiarowej z zastosowaniem zasad totalnej metody najmniejszych kwadratów, został zaprezentowany w pracy [Guo i in., 2017].

Podstawą rozwiązań prezentowanych w pracy [Snow i Schaffrin, 2016] jest czteroparametrowe zdefiniowanie położenia prostej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, zaproponowane w pracy [Roberts, 1988]. W klasycznym ujęciu, definiowanie prostej w przestrzeni trójwymiarowej, o parametrycznej postaci (dla $-\infty < t < \infty$):

$$B = \{ \mathbf{p} | \mathbf{p} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad \mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T, \quad -\infty < t < \infty \}. \quad (5.20)$$

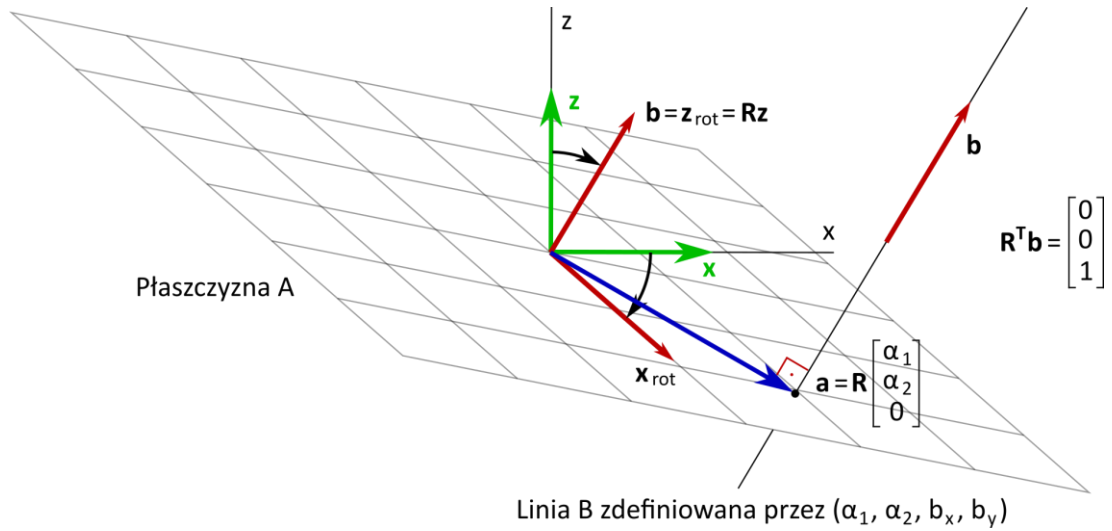
odbywa się z zastosowaniem trzech parametrów określających położenie punktu na linii – $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$, oraz trzech parametrów definiujących orientację linii w tej przestrzeni - $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$. W pracy [Snow i Schaffrin, 2016] zauważono, że reprezentacje linii (5.20) można rozszerzyć na trzy równania, dotyczące konkretnego punktu $\mathbf{p}_k = [x_k, y_k, z_k]^T$, tj.:

$$x_k = a_x + t_k b_x, \quad y_k = a_y + t_k b_y, \quad z_k = a_z + t_k b_z. \quad (5.21)$$

Autorzy pracy wskazują również, że podana w wyrażeniu (5.21) definicja prostej w przestrzeni trójwymiarowej nie jest jednoznaczna, gdyż istnieje nieskończenie wiele punktów mogących być opisane w wektorze \mathbf{a} , oraz ze względu na to, że wektor \mathbf{b} może być zastąpiony dowolną wielkością $\alpha\mathbf{b}$, dla $-\infty < t < \infty$. Z tego powodu, konieczne jest wprowadzenie konkretnych warunków, gwarantujących jednoznaczność zdefiniowania wielkości \mathbf{a} i \mathbf{b} , tj. [Snow i Schaffrin, 2016]:

$$\mathbf{b}^T \mathbf{b} = 1, \quad \mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0, \quad b_z \geq 0 \Rightarrow b_z := \sqrt{1 - b_x^2 - b_y^2}. \quad (5.22)$$

W pracy [Roberts, 1988] została zaproponowana metoda, zmniejszająca liczbę parametrów definiujących linię prostą w przestrzeni 3D z sześciu do czterech parametrów. Idea takiej transformacji została zaprezentowana na Rys. 5.6.



Rys. 5.6. Idea czteroparametrowej reprezentacji prostej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej [Snow i Schaffrin, 2016].

Z zastosowaniem ortonormalnej macierzy:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b_x^2}{1+b_z} & -\frac{b_x b_y}{1+b_z} & b_x \\ -\frac{b_x b_y}{1+b_z} & 1 - \frac{b_y^2}{1+b_z} & b_y \\ -b_x & -b_y & b_z \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

współrzędne x, y, z oryginalnego układu współrzędnych są poddane rotacji w taki sposób, że dodatnia część osi z jest równoległa do wektora \mathbf{b} . Wówczas możemy zapisać, że

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b_x^2}{1+b_z} & -\frac{b_x b_y}{1+b_z} & b_x \\ -\frac{b_x b_y}{1+b_z} & 1 - \frac{b_y^2}{1+b_z} & b_y \\ -b_x & -b_y & b_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}^T \mathbf{a}, \quad (5.24)$$

gdzie poprzez $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, 0]^T$ oznaczono współrzędne \mathbf{a} punktu na linii we wtórnym układzie współrzędnych (po przeprowadzonej rotacji). Natomiast, obrócone osie x i y „rozciągają się” na pomocniczej płaszczyźnie A , która jest normalna do wektora \mathbf{b} . W konsekwencji tak przeprowadzonej transformacji, prosta B w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, może być opisana za pomocą czterech niezależnych wielkości tj α_1, α_2, b_x oraz b_y , które definiują wektor orientacji:

$$\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z := \sqrt{1 - b_x^2 - b_y^2}]^T, \quad (5.25)$$

oraz wektor, określający położenie punktu na linii:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 - \frac{b_x^2}{1+b_z} & -\frac{b_x b_y}{1+b_z} & -b_x \end{bmatrix}^T + \alpha_2 \begin{bmatrix} -\frac{b_x b_y}{1+b_z} & 1 - \frac{b_y^2}{1+b_z} & -b_y \end{bmatrix}^T \quad (5.26)$$

Założmy teraz, że wszystkie punkty $\mathbf{p}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$, teoretycznie znajdujące się na linii prostej, zakłócone są wpływem losowych błędów pomiaru. Przyjmijmy także, że pomiarowi podlega łącznie n współrzędnych n_p punktów. Każdy z punktów opisany jest trzema współrzędnymi x , y oraz z , także $n_p = n/3$. W konsekwencji takich założeń, możemy zapisać następujące, nieliniowe równanie obserwacyjne k -tego punktu, odnoszące się do parametryzacji linii zaproponowanej w pracy [Roberts, 1988]:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 - \frac{b_x^2}{1+b_z} \\ -\frac{b_x b_y}{1+b_z} \\ -b_x \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -\frac{b_x b_y}{1+b_z} \\ 1 - \frac{b_y^2}{1+b_z} \\ -b_y \end{bmatrix} + t_k \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ \sqrt{1-b_x^2-b_y^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{x_k} \\ e_{y_k} \\ e_{z_k} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

gdzie e_x , e_y oraz e_z są losowymi zakłóceniami współrzędnych x , y i z .

Warto zauważyć, że każdemu punktowi, odpowiadać będzie inna wartość parametru t_k , którego wartość jest wyznaczana w procesie optymalizacyjnym. W konsekwencji liczba niewiadomych zwiększa się wraz ze wzrostem liczby obserwowanych punktów. Z tego powodu [Snow i Schaffrin, 2016] przeprowadzili minimalizację niewiadomych w układzie równań obserwacyjnych, wprowadzając dla każdego punktu \mathbf{p}_k zmienną $\boldsymbol{\mu}_k = [\mu_{x_k}, \mu_{y_k}, \mu_{z_k}]^T$ o elementach takich, że $\mu_{x_k} := x_k - e_{x_k}$, $\mu_{y_k} := y_k - e_{y_k}$ oraz $\mu_{z_k} := z_k - e_{z_k}$. W konsekwencji nieznaną parametr t_k może być zapisany jako:

$$t_k = \frac{\mu_{x_k} - a_x}{b_x} = \frac{\mu_{y_k} - a_y}{b_y} = \frac{\mu_{z_k} - a_z}{b_z}. \quad (5.28)$$

Takie przekształcenie umożliwia zapisanie dwóch nieliniowych równań warunkowych, w których nie uwzględnia się wielkości t_k . W odniesieniu do parametryzacji [Roberts, 1988] przyjmują one następującą postać:

$$\Phi_{k,1}(\alpha_1, \alpha_2, b_x, b_y, \boldsymbol{\mu}_k) := \sqrt{1-b_x^2-b_y^2} \left[\mu_{x_k} - \alpha_1 \left(1 - \frac{b_x^2}{1+\sqrt{1-b_x^2-b_y^2}} \right) + \right. \\ \left. - \alpha_2 \frac{-b_x b_y}{1+\sqrt{1-b_x^2-b_y^2}} \right] - b_x (\mu_{z_k} + \alpha_1 b_x + \alpha_2 b_y) = 0, \quad (5.29)$$

oraz

$$\begin{aligned} \Phi_{k,2}(\alpha_1, \alpha_2, b_x, b_y, \boldsymbol{\mu}_k) := & \sqrt{1-b_x^2-b_y^2} \left[\mu_{y_k} - \alpha_1 \left(1 + \frac{b_x b_y}{1 + \sqrt{1-b_x^2-b_y^2}} \right) + \right. \\ & \left. - \alpha_2 \left(1 - \frac{b_y^2}{1 + \sqrt{1-b_x^2-b_y^2}} \right) \right] - b_y (\mu_{z_k} + \alpha_1 b_x + \alpha_2 b_y) = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Oczywiście układy równań $\Phi_k(\alpha_1, \alpha_2, b_x, b_y, \boldsymbol{\mu}_k) = [\Phi_{k,1}, \Phi_{k,2}]^T$ są nieliniowe, dlatego poddawane są linearyzacji poprzez rozwinięcie w szereg Taylora:

$$\Phi_k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\mu}_k) \approx \Phi_k^0 + \Phi_{\alpha,k}^0 d\boldsymbol{\alpha} + \Phi_{\beta,k}^0 d\boldsymbol{\beta} + \Phi_{\mu,k}^0 d\boldsymbol{\mu}_k + \dots, \quad (5.31)$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha} := [\alpha_1, \alpha_2]^T$, $\boldsymbol{\beta} := [b_1, b_2]^T$, $\Phi_{\alpha,k}^0 := \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} \right)_0$, $\Phi_{\beta,k}^0 := \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right)_0$, $\Phi_{\mu,k}^0 := \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial \boldsymbol{\mu}_k^T} \right)_0$

oraz $\boldsymbol{\xi} = [d\boldsymbol{\alpha}^T, d\boldsymbol{\beta}^T]^T := [d\alpha_1, d\alpha_2, db_x, db_y]^T$, $d\boldsymbol{\mu}_k := [x_k - \mu_{x_k}^0 - e_{x_k}, y_k - \mu_{y_k}^0 - e_{y_k}, z_k - \mu_{z_k}^0 - e_{z_k}]^T$ (0 – przybliżona wartość nieznannej zmiennej). Zapisując powyższe, pierwsze pochodne, w macierzach $\mathbf{A}_k := \left[\begin{array}{c|c} -\Phi_{\alpha,k}^0 & -\Phi_{\beta,k}^0 \end{array} \right]$ oraz $\mathbf{B}_k := \Phi_{\mu,k}^0$, przy wektorze $\mathbf{w}_k := \Phi_k^0 + \mathbf{B}_k(\mathbf{p} - \boldsymbol{\mu}_k^0) = \mathbf{A}_k \boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}_k \mathbf{e}_k$, możemy układ równań obserwacyjnych wszystkich n_p punktów zapisać za pomocą następującego funkcjonalnego modelu Gaussa-Helmerta [Snow i Schaffrin, 2016]:

$$\mathbf{w} := \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{B} \mathbf{e}, \quad (5.32)$$

przy rozkładzie prawdopodobieństwa wektora losowych błędów pomiaru $\mathbf{e} \sim (\mathbf{0}, \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1})$. Wektor nieznanymi parametrów, definiujących wpasowanie prostej trójwymiarowej w zbiór punktów według zasad estymacji metodą najmniejszych kwadratów, wyznaczamy rozwiązując następujące kryterium optymalizacyjne:

$$\Phi(\mathbf{e}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + 2\boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{w} - \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\mathbf{e}) = \min_{\mathbf{e}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}}, \quad (5.33)$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda} \in R^{(2n/3)}$ jest nieznanym wektorem mnożników Lagrange'a [Gong i Li, 2017], [Zienkiewicz, 2019]. Bez podawania konkretnych postaci wyrażeń \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{w} oraz sposobu wyprowadzeń, opisanych szczegółowo w pracy [Snow i Schaffrin, 2016], możemy zapisać, że rozwiązaniem kryterium optymalizującego (5.33) jest estymator:

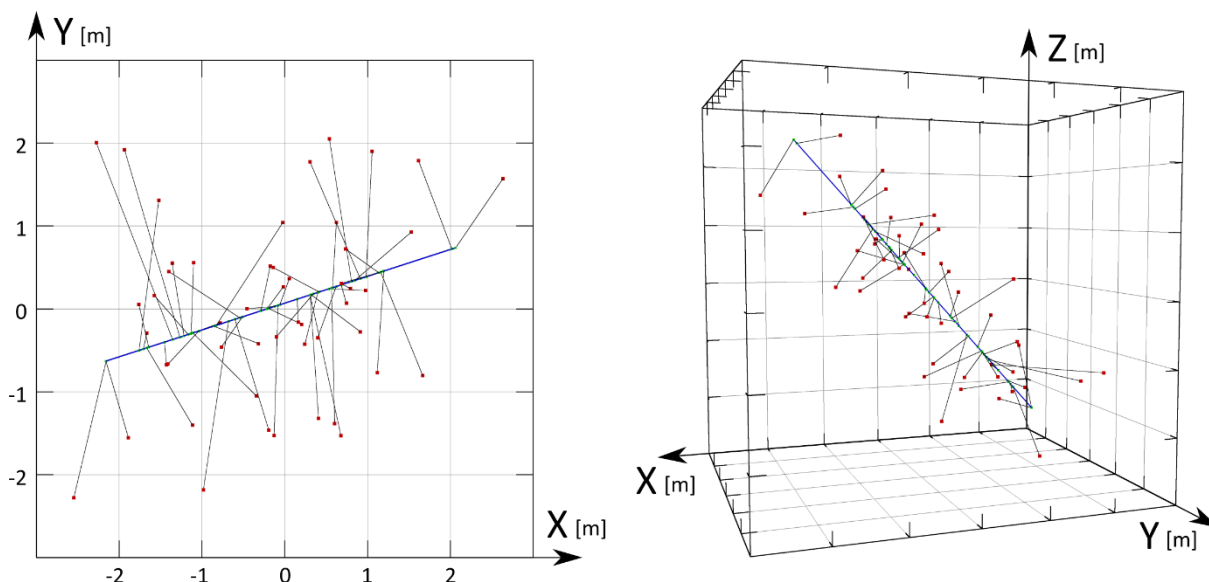
$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \left[\mathbf{A}^T (\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{w}, \quad (5.34)$$

na podstawie którego, wyznacza się wektor, przewidywanych residuów:

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\xi}}). \quad (5.35)$$

5.2.2 Testy numeryczne

Rozdział został podzielony na dwie części. W pierwszej części zostanie zaprezentowany wynik wpasowania prostej w zbiór 50 losowo wygenerowanych punktów trójwymiarowych. Współrzędne zostały wygenerowane na podstawie przyjętego rozkładu normalnego zmienne losowej. Rezultat obliczeń przedstawiono na **Rys. 5.7**. Drugą częścią rozdziału będzie przypadek pochodzący z rzeczywistego pomiaru. Procedurze wpasowania zostanie poddanych 17 punktów środkowych okręgów wyznaczonych w ramach przekrojów poprzecznych przez chmurę punktów latarni ulicznej.



Rys. 5.7. Wpasowanie prostej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej w losowy zbiór punktów w rzucie ortogonalnym z góry (a) oraz w rzucie perspektywicznym ukośnym (b).

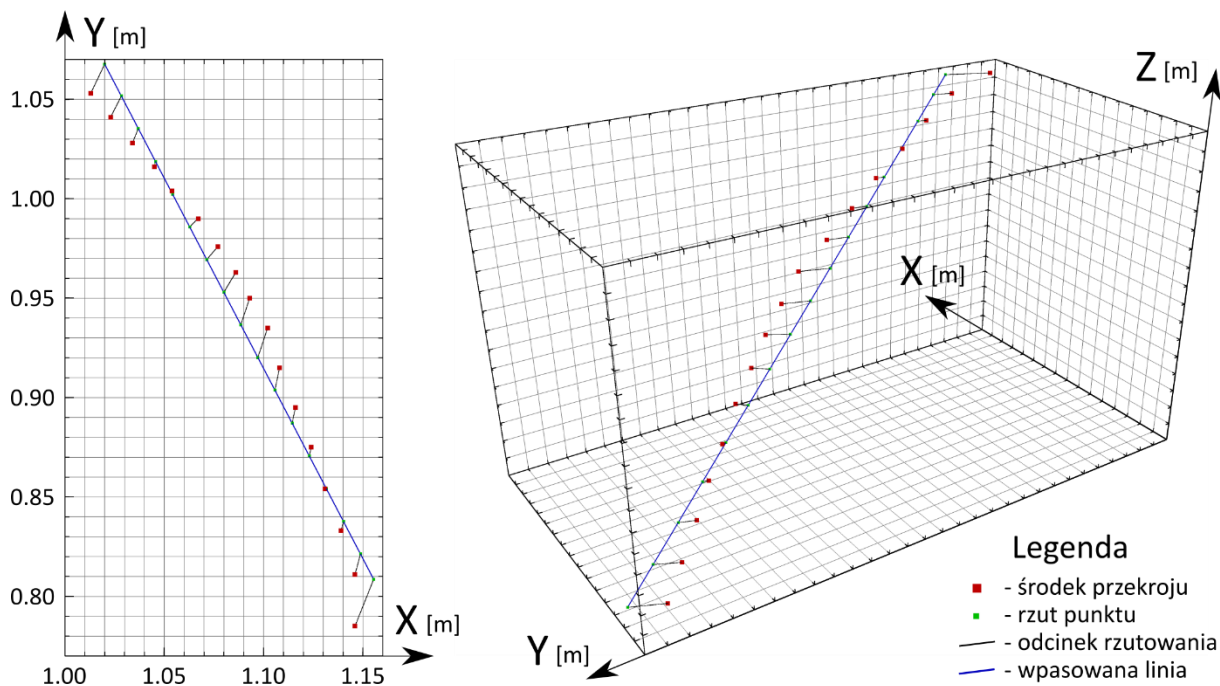
Oznaczone kolorem czerwonym punkty zostały zrzutowane ortogonalnie zgodnie z kryterium optymalizacyjnym totalnej metody najmniejszych kwadratów na prostą trójwymiarową. Punkty zrzutowane oznaczono kolorem zielonym. Suma kwadratów długości wszystkich odcinków rzutowania jest najmniejszą z możliwych do osiągnięcia. Każda inna konfiguracja będzie cechowała się większą wartością wspomnianej sumy.

Przykład wykorzystujący dane rzeczywiste składa się z 17 punktów trójwymiarowych położonych na osi konstrukcyjnej pochyłej latarni ulicznej. Punkty cechuje stała różnica wysokości poszczególnymi przekrojami poprzecznymi chmury punktów. W wyniku operacji wpasowania uzyskano współrzędne rzutów punktów na otrzymaną prostą trójwymiarową (**Tab. 5.4**, **Rys. 5.8**). Kierunek prostej określa wektor jednostkowy $\vec{v} = [0.0086, -0.0164, 0.9998]^T$.

Tab. 5.4. Współrzędne środków wygenerowanych okręgów oraz punktów pochodzących z ich ortogonalnego rzutowania na prostą trójwymiarową.

Lp.	Środek przekroju			Punkt zrzutowany		
	x [m]	y [m]	z [m]	x [m]	y [m]	z [m]
1	1.013	1.053	-1.016	1.020	1.068	-1.016
2	1.023	1.041	-0.042	1.028	1.052	-0.042
3	1.034	1.028	0.956	1.037	1.035	0.956

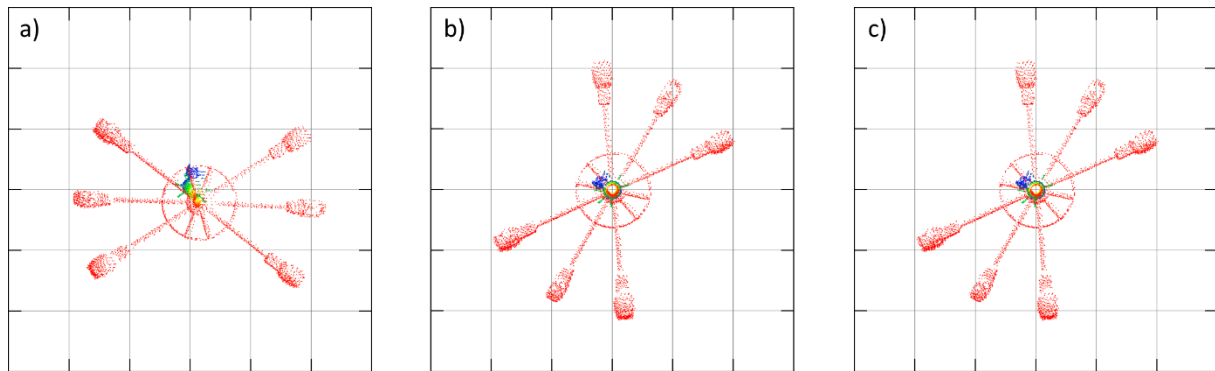
Lp.	Środek przekroju			Punkt zrzutowany		
	x [m]	y [m]	z [m]	x [m]	y [m]	z [m]
4	1.045	1.016	1.963	1.046	1.019	1.963
5	1.054	1.004	2.969	1.054	1.002	2.969
6	1.067	0.990	3.961	1.063	0.986	3.961
7	1.077	0.976	4.963	1.071	0.969	4.963
8	1.086	0.963	5.962	1.080	0.953	5.962
9	1.093	0.950	6.955	1.089	0.937	6.955
10	1.102	0.935	7.957	1.097	0.920	7.957
11	1.108	0.915	8.959	1.106	0.904	8.959
12	1.116	0.895	9.961	1.114	0.887	9.961
13	1.124	0.875	10.964	1.123	0.871	10.964
14	1.131	0.854	11.968	1.132	0.854	11.968
15	1.139	0.833	12.969	1.140	0.838	12.969
16	1.146	0.811	13.962	1.149	0.821	13.962
17	1.146	0.785	14.735	1.155	0.809	14.735



Rys. 5.8. Wpasowanie prostej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej w środki przekrojów chmury punktów pochyłej latarni ulicznej w rzucie ortogonalnym z góry (a) oraz w rzucie perspektywicznym ukośnym (b).

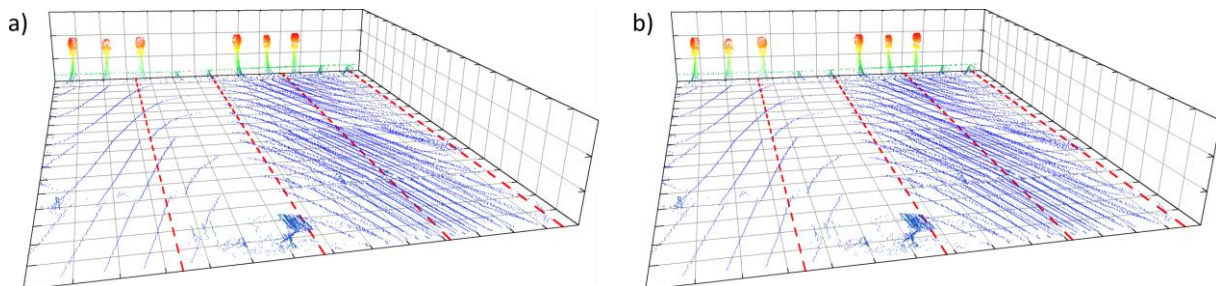
Dla czytelniejszego przedstawienia rezultatu wpasowania na **Rys. 5.8** wprowadzono dziesięciokrotne powiększenie współrzędnych horyzontalnych x i y . Zastosowanie totalnej metody najmniejszych kwadratów do wpasowania prostej w zbiór trójwymiarowych punktów zapewnia wyznaczenie parametrów geometrycznych pochyłej osi konstrukcyjnej latarni. Do uzyskania poprawnej struktury przestrzennego rozwinięcia chmury punktów na pobocznicy walca konieczne jest wyznaczenie kątów rotacji (4.25) - (4.25) i doprowadzenie zbioru danych przestrzennych do warunku pionowości (4.27). Powyższe rozwiązanie stanowi trzeci, po podejściu bazującym na dwóch punktach

oraz podejściu wektorowym, sposób wyznaczenia położenia osi konstrukcyjnej obiektów symetrycznych walcowych.



Rys. 5.9. Chmura punktów pochyłej latarni (a) oraz chmury punktów spionizowane za pomocą metody wektorowej (b) i totalnej metody najmniejszych kwadratów (c).

Wyznaczenie parametrów elementarnych obrotów wokół osi OZ i OY następuje na podstawie współrzędnych wektora wskazującego kierunek prostej w euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej. Chmura punktów pochyłej latarni (**Rys. 5.9 a**) została poddana procesowi pionizacji. Zarówno w przypadku wykorzystania parametrów orientacji osi konstrukcyjnej pochodzących z wektora wypadkowego (**Rys. 5.9 b**), jak również parametrów wyznaczonych totalną metodą najmniejszych kwadratów (**Rys. 5.9 c**) uzyskano prawidłowe pionowe ułożenie chmury punktów. W wyniku przestrzennego rozwinięcia obu zbiorów danych przestrzennych uzyskano bardzo zbliżone rezultaty (**Rys. 5.10**).



Rys. 5.10. Przestrzenne rozwinięcie spionizowanych chmur punktów uzyskanych za pomocą metody wektorowej (a) i totalnej metody najmniejszych kwadratów (b).

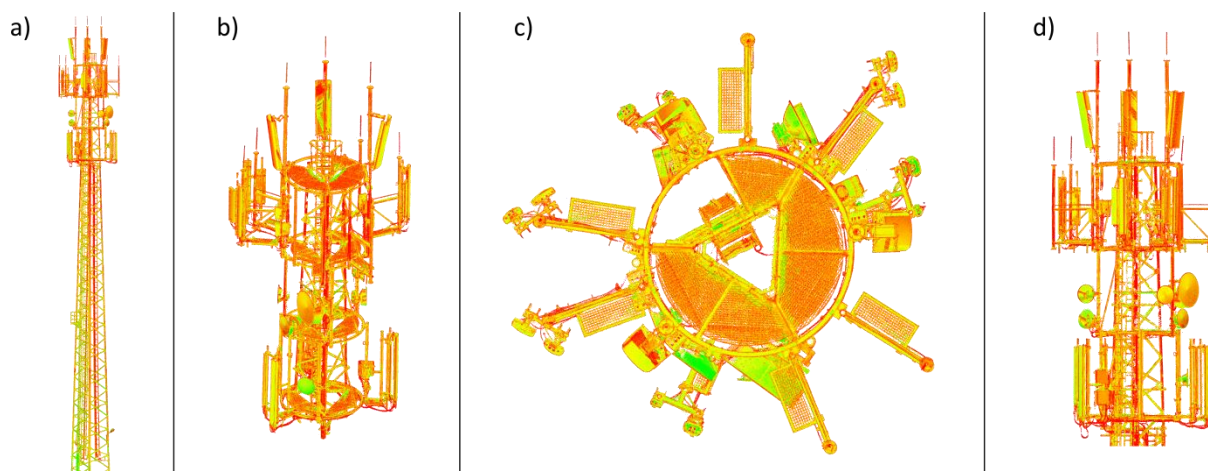
Przeprowadzone analizy dowodzą wysokiej przydatności obu metod w przestrzennych rozwinięciach chmur punktów. Zarówno utworzenie wektorów właściwych dla kolejnych przekrojów i wyznaczenie z nich wektora wypadkowego, jak również wykorzystanie środków przekrojów w estymacji parametrów osi konstrukcyjnej przynosi podobne rezultaty w pionizacji chmur punktów.

6 Aplikacje praktyczne metody kartograficznego zobrazowania chmury punktów

Opracowane metody przestrzennych rozwinięć chmur punktów zostaną w rozdziale 5 ukazane w aspekcie praktycznym na wybranych przykładach. Analizie zostało poddanych kilka chmur punktów pochodzących z pomiarów wykonanych w technologii naziemnego skaningu laserowego. Dzięki wykorzystaniu rzeczywistych danych terenowych możliwe było zaobserwowanie szeregu zjawisk i procesów zachodzących w konstrukcji obiektów symetrycznych. Dane przestrzenne zostały w pierwszym etapie poddane analizie pod kątem określenia ich płaszczyzn pierwotnych oraz elementów wyznaczających ich symetrię. Kolejnym krokiem było obliczenie wartości estymatorów odpowiednich wielkości geometrycznych kształtu powierzchni oraz zastosowanie odpowiednich formuł odwzorowawczych realizujących przestrzenne rozwinięcia. W każdym przypadku przedstawiono wyniki przeprowadzonych analiz ze stosownym omówieniem uzyskanych rezultatów.

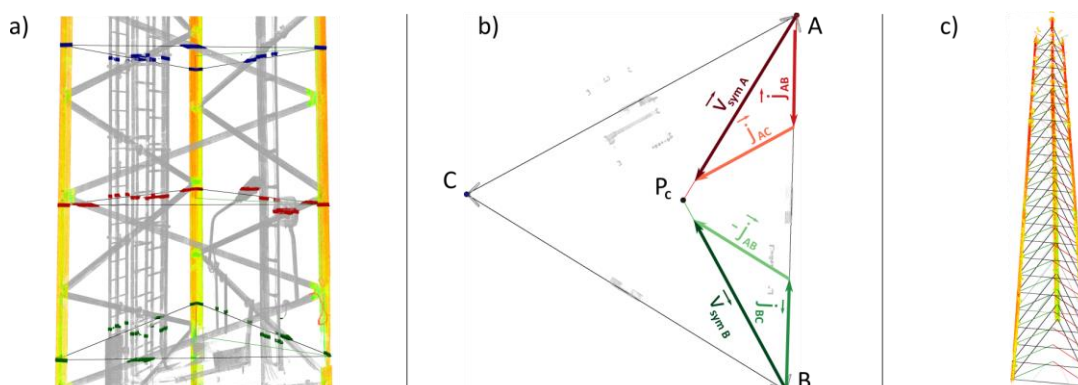
6.1 Rozwinięcie na pobocznicy walca – wieża telefonii GSM

Pierwszym z przykładów zastosowania metod przestrzennych rozwinięć chmur punktów jest wieża telekomunikacyjna zlokalizowana w Krzypinowie koło Krakowa (**Rys. 6.1 a**). Chmura punktów przedstawiająca konstrukcję podporową o podstawie trójkątnej (układ elementów stalowych i drabin) została wykorzystana do wyznaczenia parametrów osi rozwinięcia obiektu symetrycznego. Ze względu na odpowiedni rozkład, zastosowanie przestrzennego rozwinięcia zawężono jedynie do górnej części wieży składającej się z konstrukcji podantenowych z zainstalowaną aparaturą techniczną (zwanej dalej ramą). Na ramie umieszczone są podesty robocze umożliwiające dostęp do anten sektorowych, radiolinii, RRU (Remote Radio Unit) i innych urządzeń transmisyjnych. Przestrzenny rozkład aparatury wynika z założeń technicznych istniejącej sieci stacji bazowych, zaprojektowanej dla zapewnienia pokrycia terenu określonym sygnałem użytkowym. Stąd też urządzenia rozmieszczone są na wybranych kierunkach jednej z trzech kołowych obręczy ramy, bądź na pionowych wspornikach kolejnych poziomów podestów roboczych wieży (**Rys. 6.1 b, c, d**). Na rysunku można również zaobserwować dwurzędowy sposób instalacji infrastruktury, który zapewnia wymagane odsunięcie anten od osi konstrukcji oraz skierowanie ich w pożądanym kierunku (**Rys. 6.1 c**). Stopień nagromadzenia aparatury sprawia trudności interpretacyjne chmury punktów przy pojedynczym widoku ortogonalnym bądź perspektywicznym. Punkty z chmury przedstawiające urządzenia znajdujące się na jednym kierunku (azymucie) posiadają zbliżone wartości współrzędnych horyzontalnych (x, y). Powoduje to, że w rzucie z góry następuje wzajemne przykrywanie się punktów właściwych dla urządzeń położonych na kolejnych poziomach ramy (**Rys. 6.1 c**). Niedogodność to jest częściowo rozwiązywana poprzez stosowanie kolejnych rzutów ukośnych i bocznych chmury punktów. Jednak również w wypadku kolejnych rzutów obecne są przesłonięcia punktów w chmurze. Konstrukcja ramy oraz trudności w interpretacji i wnioskowania o rozkładzie i geometrii aparatury jest przesłanką uzasadniającą użycie przestrzennych rozwinięć chmur punktów.



Rys. 6.1. Chmura punktów wieży (a) i podestów z konstrukcjami podantenowymi i aparaturą (b, c, d).

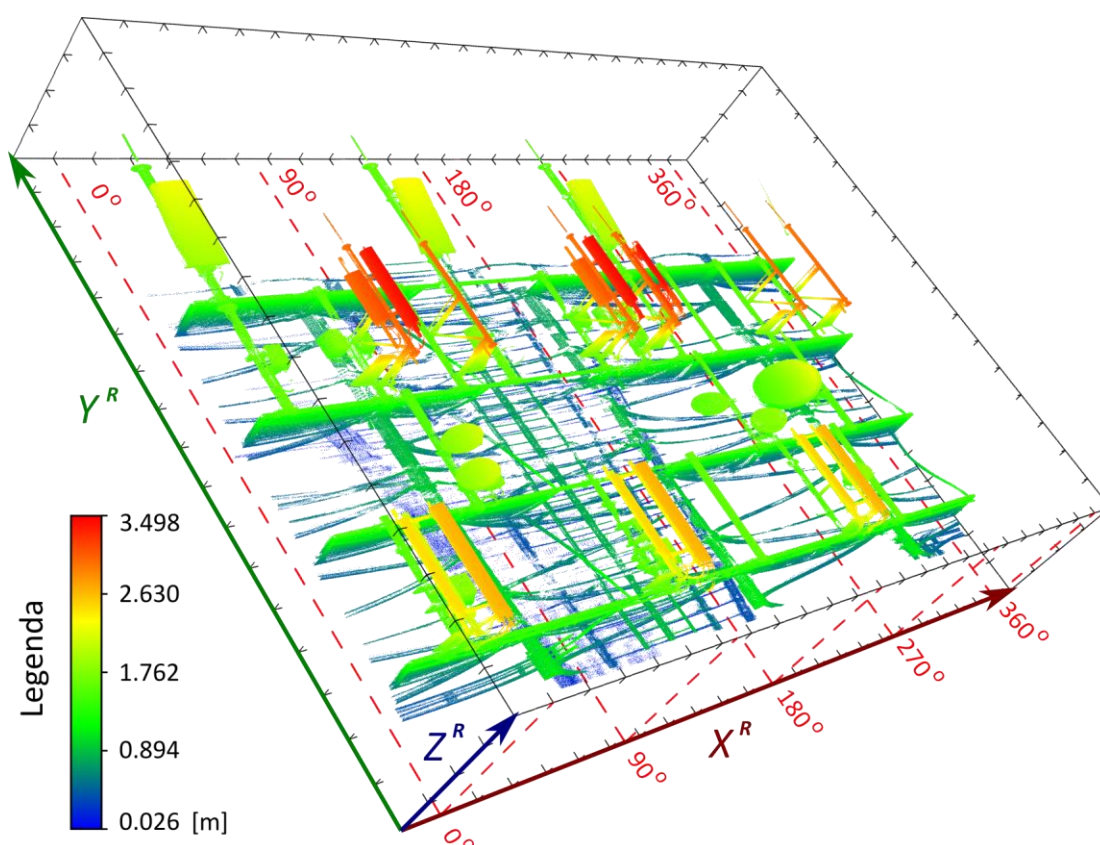
Opracowanie danych pomiarowych polegało na wyselekcjonowaniu z chmury punktów fragmentu przedstawiającego jedynie ramę (**Rys. 6.1 a, b**) oraz dodatkowej chmury z podporą trójkątną wieży. Drugi zbiór danych przestrzennych posłużył do zapewnienia poprawności przeprowadzenia przestrzennego rozwinięcia poprzez eliminację wpływu pochylenia konstrukcji. W tym celu należało wyznaczyć przebieg osi konstrukcyjnej obiektu. Pomimo, że możliwe było wyznaczenia położenia osi w ramach samego ramy, to wiarygodniejsze rezultaty uzyskano przy poddaniu analizie wysmukłej kilkudziesięciometrowej podpory trójkątnej wieży. Wyznaczenie wertykalnej osi przeprowadzono na podstawie wąskich horyzontalnych wycinków chmury punktów pozyskanych na wysokościach zmieniających się z interwałem 2 m (**Rys. 6.2 a**). Każdy z powstałych wycinków chmury punktów jest przekrojem poprzecznym przez strukturę podpory i zawiera punkty reprezentujące trzy główne dźwigary, drabiny oraz występujące dodatkowe ukośne wsporniki konstrukcyjne. Na **Rys. 6.2 b** przedstawiono na wybranym wycinku chmury punktów rozkład wektorów realizujących wyznaczenie ze współrzędnych wierzchołków trójkąta A , B i C jego środka ciężkości P_c . W obliczeniach zastosowano algorytmem (4.1) – (4.14) z rozdziału 4.3.1. Na **Rys. 6.2 c** widoczna jest chmura punktów trzech dźwigarów głównych oraz wyznaczone analitycznie trójkątne profile podpory zwiężające się wraz z narastaniem wysokości konstrukcji.



Rys. 6.2. Horyzontalne przekroje chmury punktów podpory wieży z przykładem wyznaczeniem środka ciężkości trójkąta na jednym z poziomów.

Współrzędne wierzchołków trójkątów A , B , C odczytano w oparciu o 19 horyzontalnych wycinków chmury punktów, wygenerowanych z 2-metrowym interwałem wertykalnym. Wyznaczone za pomocą procedury (4.9) – (4.14) współrzędne środków ciężkości trójkątów wykorzystano do wyznaczenia współrzędnych wektorów rozpiętych pomiędzy środkiem ciężkości pierwszego, najniższego poziomu odniesienia, a środkami ciężkości wyższych przekrojów. Po obliczeniu wektorów jednostkowych i uwzględnieniu wag w wyznaczono wektor wypadkowy definiujący kierunek osi konstrukcyjnej podpory wieży. Współrzędne wektora wypadkowego pozwoliły na wyznaczenie kątów elementarnych rotacji wokół osi OZ (kąt α) oraz OY (kąt β) (4.25), (4.26). Kolejnym krokiem obliczeniowym była pionizacja chmury punktów (4.27) eliminująca wpływ pochyłości konstrukcji na poprawność przestrzennego rozwinięcia chmury punktów. Wyniki otrzymane dla rozpatrywanej podpory trójkątnej przedstawiono w **Tab. 6.1**. Uzyskane współrzędne wektorów umożliwiają wyznaczenie istotnego z punktu widzenia bieżącego utrzymania konstrukcji wskaźnika wychylenia wieży od pionu. Z przeprowadzonej analizy wynika odchylenie osi konstrukcji od pionu wynoszące 0.045 m na ostatnim z rozpatrywanych poziomów $z = 38$ m.

Zgodnie z przyjętym wcześniej założeniem, zastosowanie rozwinięcia na spionizowanej chmurze punktów zawężono do ramy wieńczącej podporę trójkątną wieży. Rezultat zastosowania algorytmu przedstawiono na **Rys. 6.3** i **Rys. 6.4**, które zawierają informacje dotyczące rozkład aparatury zainstalowanej na wieży wynikające z zastosowania przestrzennego rozwinięcia.

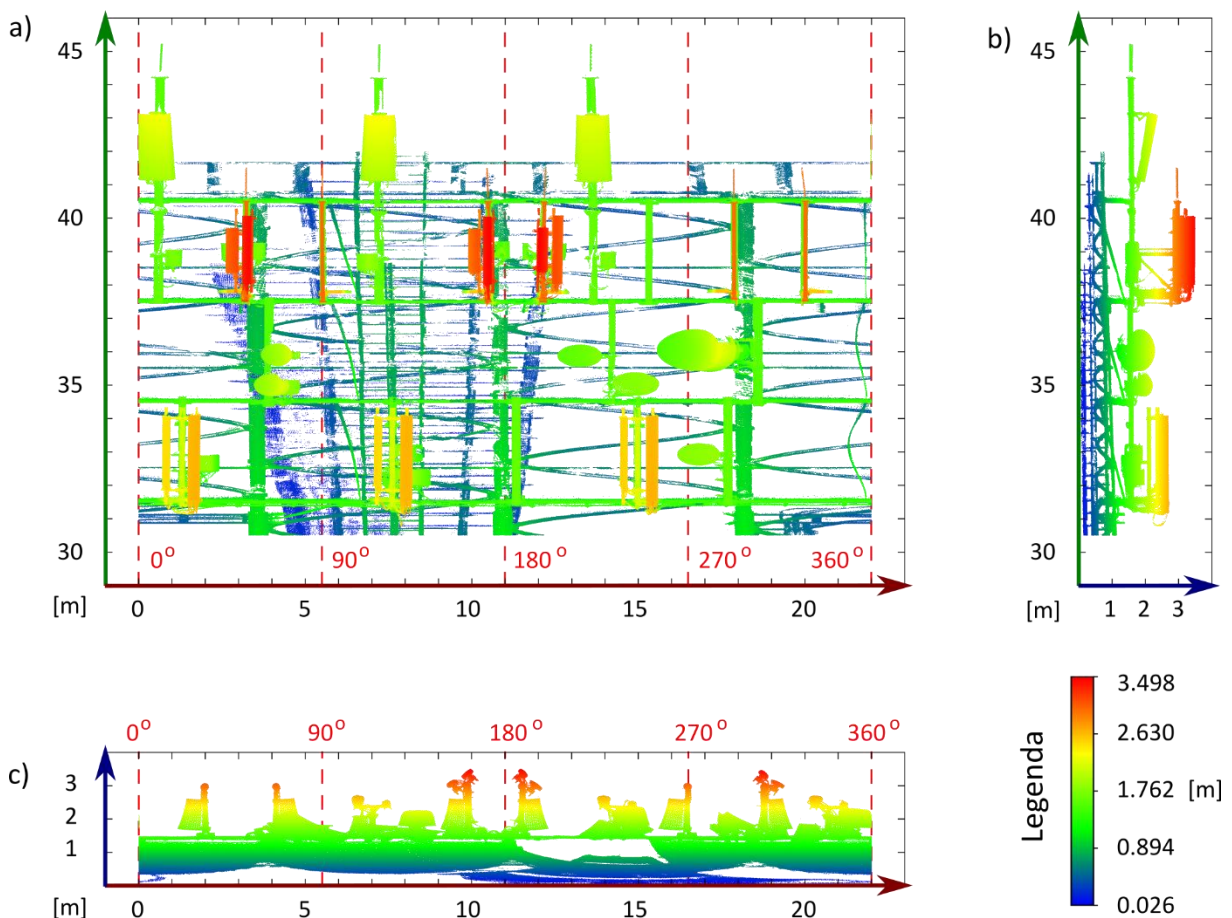


Rys. 6.3. Przestrzenne rozwinięcie spionizowanej chmury punktów ramy z aparaturą w rzucie perspektywicznym.

Rzut perspektywiczny zapewnia możliwość ogólnego wnioskowania odnośnie przestrzennej konfiguracji obiektu. Na niższym poziomie znajdują się obiekty położone najbliżej osi rozwinięcia, tj. drabiny i elementy podporowe. Następnie wyraźnie wydzielone są poszczególne poziomy ramy

z zainstalowanymi podestami roboczymi do bieżącego utrzymania infrastruktury telekomunikacyjnej. Na skutek rozwinięcia kołowy kształt podestów odwzorował się w postaci wycinków płaszczyzn. Wraz ze wzrostem wartości parametru głębokości (współrzędna Z^R) widoczny jest układ rusztowań służący do montażu anten, odgromników i innych urządzeń. Kolorystyka legendy przedstawia odległości poszczególnych punktów chmury od osi rozwinięcia. Na rysunku wprowadzono podstawowe kierunki umożliwiające orientację poszczególnych elementów rozwiniętej chmury punktów w lokalnym układzie współrzędnych.

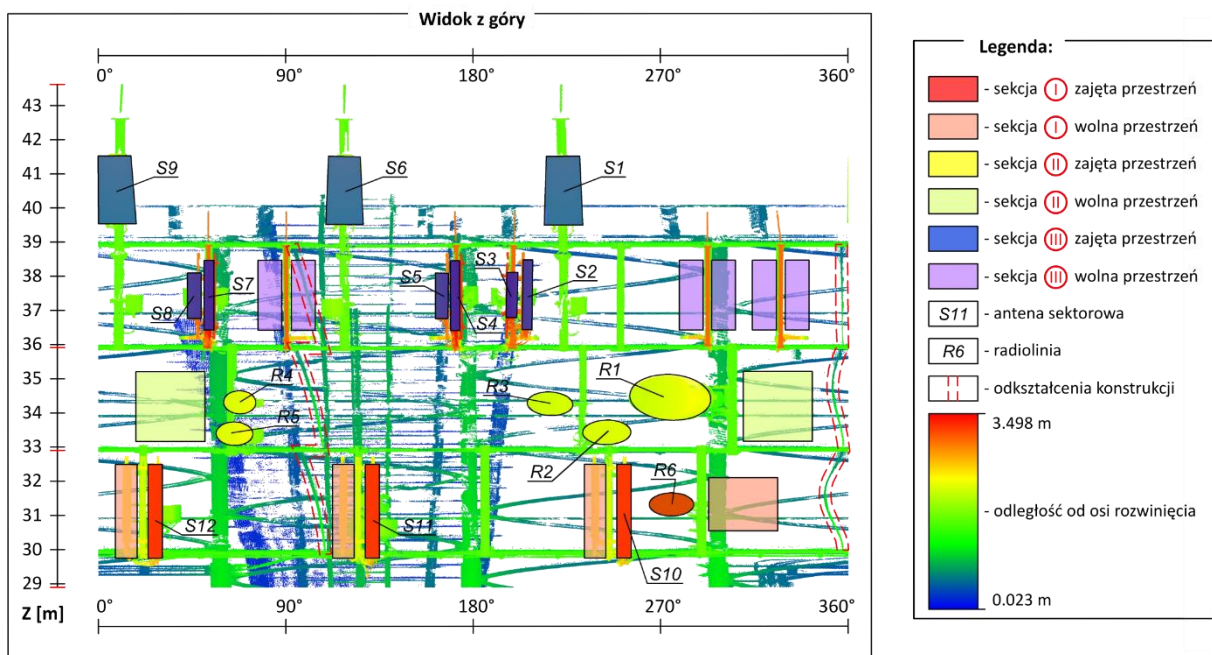
Szczegółowe analizy ilościowe i porównawcze przeprowadzono z wykorzystaniem rzutów ortogonalnych przestrzennego rozwinięcia (**Rys. 6.4**). Z racji występowania kilku poziomów ramy, również w przypadku rozwiniętej chmury punktów występuje zjawisko przesłaniania się punktów, niemniej jego negatywny wpływ na czytelność zbioru jest mniejszy.



Rys. 6.4. Przestrzenne rozwinięcie spionizowanej chmury punktów ramy z aparaturą telekomunikacyjną w rzutach ortogonalnych.

Wpływ przesłaniania się poszczególnych fragmentów chmury punktów widoczny jest zwłaszcza w rzutach bocznych rozwiniętej chmury punktów (**Rys. 6.4 b, c**). Pomimo tego w czytelny sposób informują one o wybranych zależnościach topologicznych aparatury takich jak np. wysokość montażu urządzeń czy kąt kierunkowy anten na ramie. Stanowi to istotną wartość dodaną do procedury inwentaryzacji konstrukcji tego typu. Rzut z góry (**Rys. 6.4 a**) w czytelny sposób przedstawia rozkład geometryczny, a dodanie parametru wysokości (legenda) dodatkowo zwiększa zakres prezentowanych informacji geometrycznych.

Na podstawie uzyskanego zbioru danych stworzono opracowanie prezentujące stopień zajętości konstrukcji przez aparaturę (**Rys. 6.5** i **Rys. 6.6**). W trakcie pracy zadbano o zminimalizowanie wpływu przesłaniania się chmury punktów. W tym celu podzielono rozwiniętą chmurę punktów na trzy odrębne części i przedstawiono je oddzielnie (**Rys. 6.6**). Sekcje wydzielono w trzech zakresach wysokości i czerwonymi znacznikami oznaczono ich wartości graniczne. Widok rozwinięcia z góry (**Rys. 6.5**) pozwala na pozyskanie informacji o wolnych i zajętych przestrzeniach montażowych aparatury. Dodatkowo, rzut ten pozwala na określenie miejsc występowania lokalnych odkształceń konstrukcji. W rozważanym przypadku na kierunkach 100 ° oraz 350 ° przerywaną linią czerwoną zaznaczono elementy podporowe, których pierwotny prostoliniowy kształt uległ zmianie. Szczególnie jest to widoczne na kierunku 350 °, gdzie występuje większe stopniowe narastanie odkształceń na niższych poziomach ramy niż w pierwszym przypadku. Wniosek ten może być przyczynkiem do szczegółowej oceny konstrukcji w nieprzetworzonej chmurze punktów.



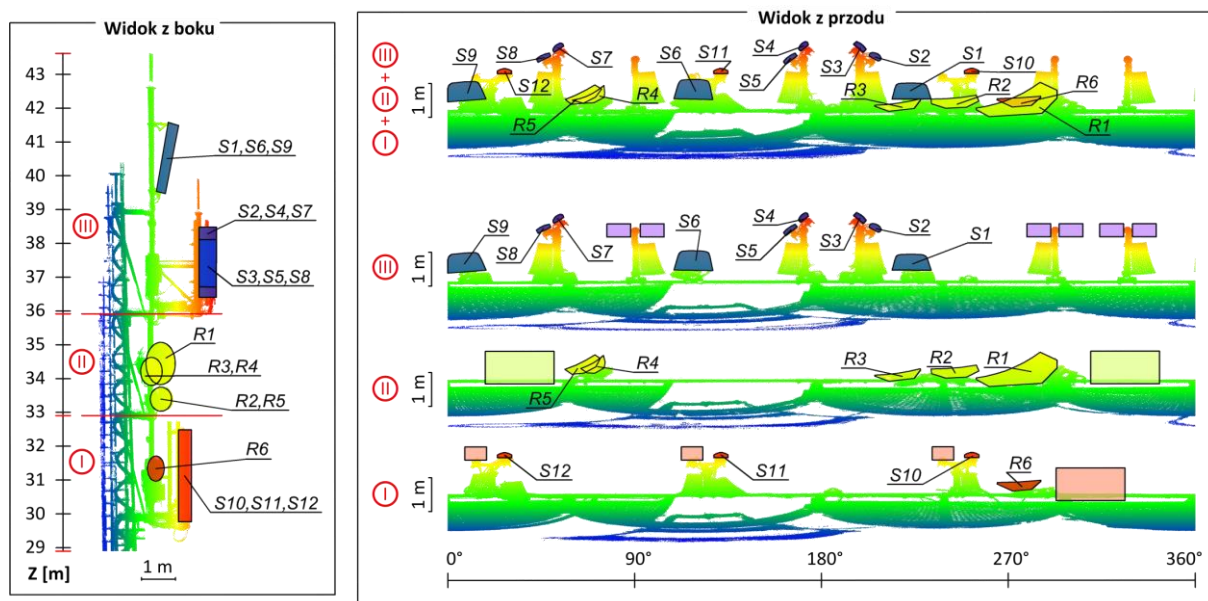
Rys. 6.5. Analiza ilościowa i topologiczna stopnia zajętości ramy z aparaturą w widoku z góry.

Jeden z dwóch kolejnych rzutów ortogonalnych uwzględnia bezpośredni podział chmury na części w postaci sekcji (**Rys. 6.6**). W widoku z boku widoczne są zbliżone odległości aparatury telekomunikacyjnej od osi rozwinięcia.

Tab. 6.1. Procedura wyznaczenia wektora wypadkowego wyznaczającego oś konstrukcji.

z [m]	A		B		C		P _c		V				j			w [-]	w* j		
	x _A [m]	y _A [m]	x _B [m]	y _B [m]	x _C [m]	y _C [m]	x _{Pc} [m]	y _{Pc} [m]	x _v [m]	y _v [m]	z _v [m]	v [m]	x _j [m]	y _j [m]	z _j [m]		w* x _j [m]	w* y _j [m]	w* z _j [m]
0	11.983	25.065	11.873	21.349	8.711	23.305	10.855	23.240	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
2	11.943	25.005	11.836	21.416	8.786	23.305	10.855	23.242	0.000	0.002	2	2.001	0.000	0.001	0.999	0.000	0.002	1.999	
4	11.906	24.948	11.807	21.481	8.856	23.300	10.856	23.243	0.001	0.003	4	4.002	0.000	0.001	0.999	0.001	0.003	3.998	
6	11.869	24.889	11.777	21.543	8.926	23.294	10.857	23.242	0.002	0.002	6	6.004	0.000	0.000	0.999	0.002	0.002	5.996	
8	11.836	24.827	11.747	21.603	8.998	23.291	10.861	23.240	0.006	0.000	8	8.005	0.001	0.000	0.999	0.006	0.000	7.995	
10	11.801	24.762	11.715	21.667	9.074	23.289	10.864	23.239	0.009	-0.001	10	10.006	0.001	0.000	0.999	0.009	-0.001	9.994	
12	11.765	24.705	11.683	21.727	9.145	23.285	10.864	23.239	0.009	-0.001	12	12.007	0.001	0.000	0.999	0.009	-0.001	11.993	
14	11.734	24.645	11.652	21.785	9.218	23.285	10.868	23.238	0.013	-0.002	14	14.009	0.001	0.000	0.999	0.013	-0.002	13.991	
16	11.707	24.582	11.621	21.843	9.292	23.284	10.873	23.236	0.018	-0.004	16	16.010	0.001	0.000	0.999	0.018	-0.004	15.990	
18	11.680	24.518	11.591	21.899	9.369	23.287	10.880	23.235	0.025	-0.005	18	18.011	0.001	0.000	0.999	0.025	-0.005	17.989	
20	11.649	24.456	11.561	21.961	9.450	23.286	10.886	23.235	0.031	-0.005	20	20.012	0.002	0.000	0.999	0.031	-0.005	19.988	
22	11.614	24.400	11.536	22.027	9.522	23.282	10.890	23.236	0.035	-0.004	22	22.013	0.002	0.000	0.999	0.035	-0.004	21.987	
24	11.577	24.343	11.509	22.086	9.595	23.273	10.893	23.234	0.038	-0.006	24	24.014	0.002	0.000	0.999	0.038	-0.006	23.986	
26	11.538	24.280	11.479	22.145	9.663	23.261	10.893	23.228	0.038	-0.012	26	26.016	0.001	0.000	0.999	0.038	-0.012	25.984	
28	11.498	24.217	11.452	22.201	9.731	23.251	10.893	23.223	0.038	-0.017	28	28.017	0.001	-0.001	0.999	0.038	-0.017	27.983	
30	11.466	24.149	11.414	22.261	9.808	23.252	10.896	23.221	0.041	-0.019	30	30.018	0.001	-0.001	0.999	0.041	-0.019	29.982	
32	11.441	24.095	11.375	22.323	9.873	23.262	10.896	23.226	0.041	-0.014	32	32.019	0.001	0.000	0.999	0.041	-0.014	31.981	
34	11.412	24.035	11.343	22.386	9.942	23.263	10.900	23.227	0.045	-0.013	34	34.020	0.001	0.000	0.999	0.045	-0.013	33.980	
36	11.371	23.971	11.311	22.447	10.014	23.261	10.900	23.226	0.045	-0.014	36	36.022	0.001	0.000	0.999	0.045	-0.014	35.978	
38	11.335	23.920	11.277	22.505	10.084	23.261	10.898	23.228	0.043	-0.012	38	38.023	0.001	0.000	0.999	0.043	-0.012	37.977	

$$\vec{v}_{wyp} = \begin{matrix} 0.001 & 0.000 & 0.999 \end{matrix}$$



Rys. 6.6. Analiza ilościowa i topologiczna stopnia zajętości ramy z aparaturą w widokach z boku i z przodu.

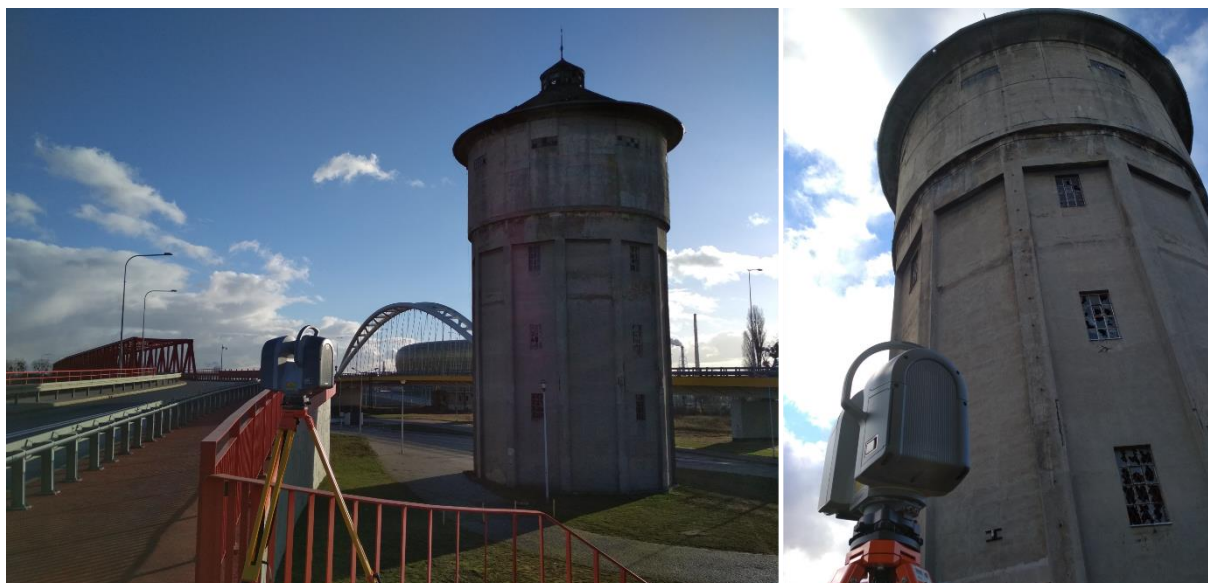
Widok przestrzennego rozwinięcia z boku (**Rys. 6.6**) zawiera poziome odcinki w kolorze czerwonym, które wskazują wartości graniczne przyjętych zakresów wysokościowej dla trzech sekcji. Zgodnie z formułą przestrzennego rozwinięcia na pobocznicy walca (4.30), współrzędne Z nieprzetworzonej chmury punktów odpowiadają współrzędnym Y^r odwzorowanego zbioru. Anteny sektorowe, oznaczone prefiksem S oraz numerem porządkowym występują w sekcjach I i III. Z kolei radiolinie (prefiks R) zamontowano na ramie w sekcjach I i II. W ramach każdej z sekcji aparatura montowana jest w zbliżonych odległościach od osi rozwinięcia oraz na zbliżonych wysokościach. Legenda wchodząca w skład **Rys. 6.5** jest zgodna z **Rys. 6.6** i prezentuje zarówno odległości punktów chmury od osi rozwinięcia (parametr głębokości), jak również zastosowane dodatkowe oznaczenia.

Widok z przodu (**Rys. 6.6**) został podzielony na cztery części: jednej zbiorczej oraz trzech obejmujących poszczególne sekcje konstrukcji ramy. Wydzielenie odrębnych rzutów dla każdej z sekcji rozwiązuje problem nakładania się fragmentów chmury punktów. Trzy pierwsze ilustracje, licząc od dołu, prezentują rozmieszczenie aparatury na ramie oraz wolne przestrzenie montażowe na każdej z trzech wydzielonych sekcji. Czwarty rzut (na górze) jest zestawieniem zbiorczym, na którym umieszczono wszystkie urządzenia obecne na wskazanych poprzednio sekcjach. Przedstawienie rozwiniętej chmury punktów w widoku z góry (**Rys. 6.5**) wraz z widokiem z przodu (**Rys. 6.6**) stanowi czytelną reprezentację stopnia zajętości ramy z aparaturą. Rzut z przodu zawiera również informację odnośnie kąta kierunkowego poszczególnych anten, co stanowi kolejną wartość dodaną rozwiązania i dostarcza dodatkowy materiał w procesie zarówno bieżącego utrzymania infrastruktury, jak również modernizacji sieci telekomunikacyjnej.

6.2 Rozwinięcie na pobocznicy walca – kolejowa wieża ciśnień

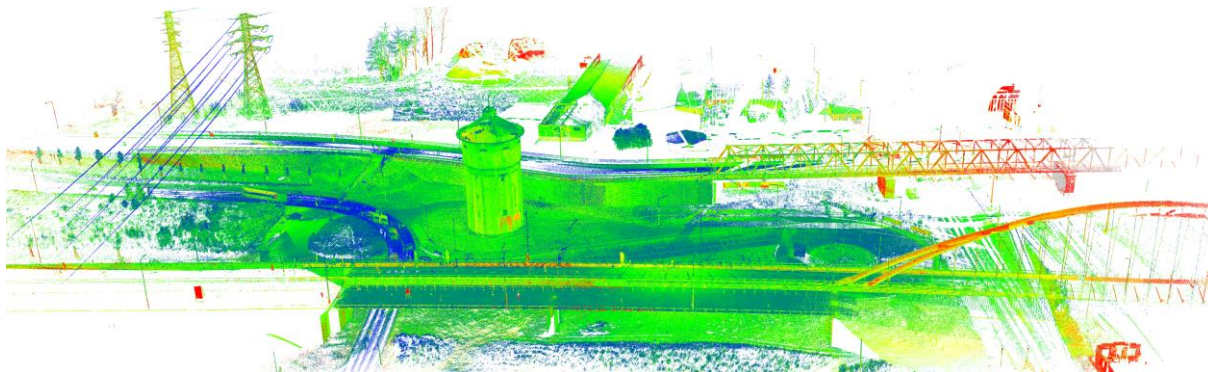
Drugim przykładem zastosowania przestrzennego rozwinięcia chmury punktów na pobocznicy walca jest kolejowa wieża ciśnień. Obiekt znajdujący się przy zbiegu ul. Jana Kochanowskiego i al. Macieja Płażyńskiego w Gdańsku jest własnością Polskich Kolei Państwowych S.A. Wieża ciśnień cechuje się symetrycznym rozkładem elewacji, w skład której wchodzi szereg płaskich ścian wokół całego obiektu. Ta charakterystyczna cecha architektoniczna, wraz z zasadniczym kształtem budowli

umożliwiła ukazanie odmiennego aspektu przestrzennego rozwinięcia chmury punktów na pobocznicy walca. Pomiar obiektu przeprowadzono impulsowym skanerem laserowym Trimble TX8 w grudniu 2018 r. (**Rys. 6.7**). W terenie nie stosowano dodatkowych znaczników służących do łączenia sąsiadujących ze sobą chmur punktów. Stanowiska instrumentu rozlokowano wokół obiektu w celu zapewnienia jak najpełniejszego zobrazowania jego ścian. Ograniczeniem w równomiernym pokryciu punktami elewacji wieży był brak możliwości pomiaru części pokrycia dachowego. Niedogodność udało się częściowo wyeliminować poprzez umieszczenie instrumentu na stanowisku znajdującym się na okolicznym wiadukcie drogowym oraz na stanowiskach oddalonych od obiektu o odległość kilkudziesięciu metrów. Przeprowadzone czynności zapewniły pokrycie punktami około 70 % powierzchni dachu kolejowej wieży ciśnień.



Rys. 6.7. Skanowanie laserowe kolejowej wieży ciśnień w Gdańsku.

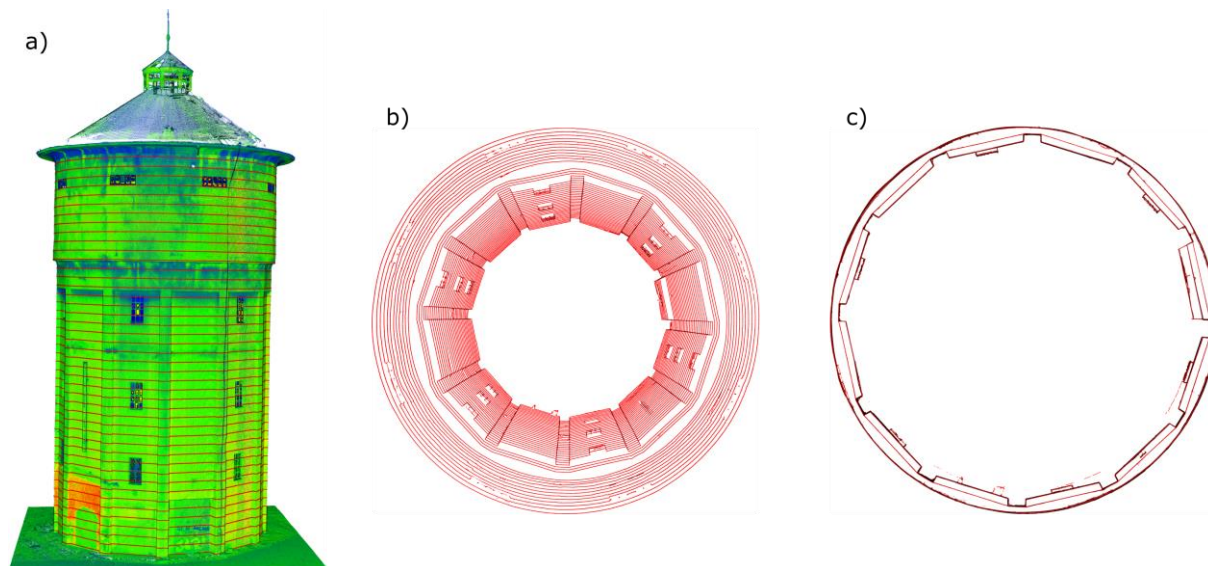
Rejestrację chmur punktów wykonano w oprogramowaniu Trimble RealWorks w oparciu o występujące w sąsiednich chmurach punktów zobrazowania jednakowych charakterystycznych obiektów przestrzennych. Na ich podstawie została określona wzajemna zależność przestrzenną poszczególnych chmur punktów w postaci wyznaczenia dla każdej chmury punktów współczynników transformacji (kąta rotacji wokół osi OZ oraz wektora translacji). W oparciu o macierz transformacji doprowadzono wszystkie zbiory do jednego globalnego układu współrzędnych. Z racji przeprowadzenia pomiaru instrumentem posiadającym ważny certyfikat kalibracji, wszystkie pomierzone za jego pomocą dane przestrzenne cechują się zgodnością liniową z układem SI. Stąd też nie wystąpiła konieczność wyznaczenia współczynników zmiany skali, gdyż odległości pomiędzy odpowiadającymi sobie punktami w sąsiednich chmurach punktów są jednakowe. Rejestrację zakończono z błędem 3 mm, a jej wynik przedstawiono na (**Rys. 6.8**). Uzyskana chmura punktów posiada cechy wysokiej spójności wewnętrznej oraz dużej wiarygodności w przedstawieniu rzeczywistej geometrii elewacji wieży ciśnień.



Rys. 6.8. Zarejestrowana chmura punktów przedstawiająca wieżę ciśnień oraz jej otoczenie w kolorystyce intensywności odbicia wiązki lasera.

Wstępny etap opracowania polegał na pozyskaniu z zarejestrowanej chmury punktów mniejszego fragmentu przedstawiającego wieżę ciśnień. Następnie w obrębie powstałej mniejszej chmury została przeprowadzona selekcja przekrojów poprzecznych chmury. Dla jak najwierniejszego określenia przebiegu osi konstrukcyjnej wieży ciśnień zastosowano 0.5-metrowy interwał wertykalny kolejnych przekrojów. W efekcie uzyskano 46 przekrojów poprzecznych chmury punktów (**Rys. 6.9 a**). Z racji zróżnicowanej geometrii wieży, przekroje posiadały jeden z trzech charakterystycznych kształtów (**Rys. 6.9 a, b**). Większą część z nich stanowiły najniżej położone przekroje przedstawiające m.in. 12 płaskich fragmentów ścian rozdzielonych wypustami. Nad nimi znajdowały się przekroje poprzeczne przedstawiające łącznik z górną okrągłą częścią zbiornika wieży. W obrębie każdego przekroju na podstawie wchodzących w jego skład punktów przeprowadzono wpasowanie okręgu metodą odporną Hubera [**Huber, 1964**]. Zaletą metody jest eliminowanie wpływu obserwacji odstających (np. punktów z chmury stanowiących szum) na ostateczny wynik estymacji parametrów okręgu.

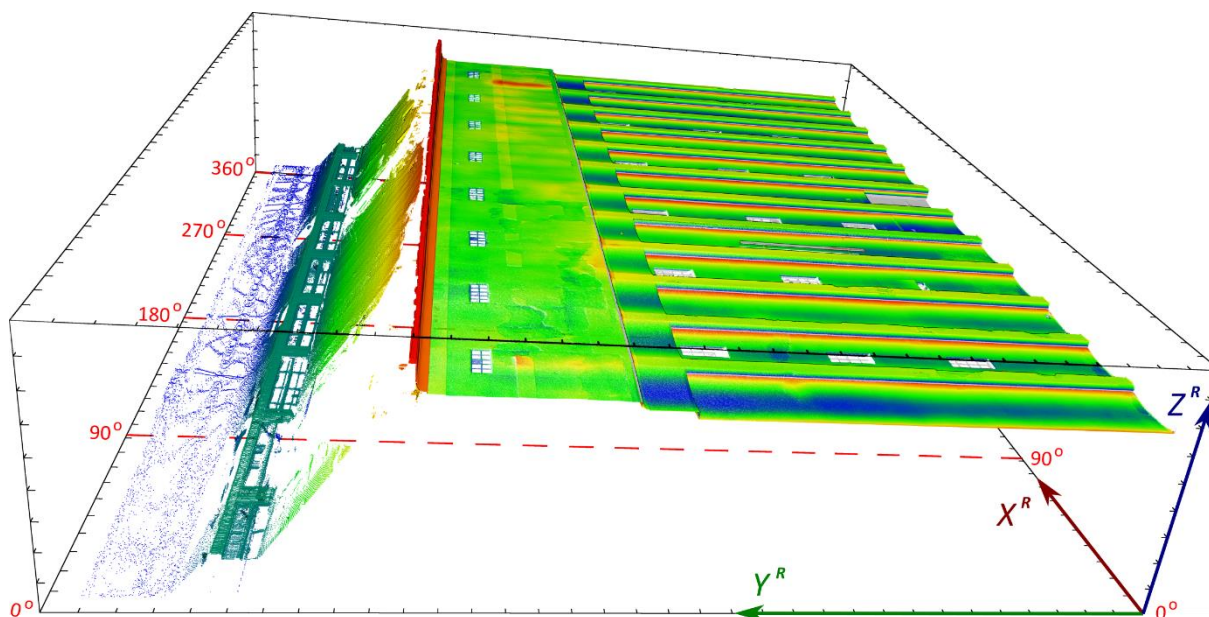
W wyniku procedury wpasowania okręgów w punkty zgrupowane w przekrojach poprzecznych uzyskano dla wszystkich 46 przekrojów współrzędne geometrycznego środka okręgu (x , y) oraz długość promienia r (5.1) - (5.19). Współrzędną wysokościową punktów środkowych wyznaczonych okręgów przyjęto z wysokości poszczególnych przekrojów poprzecznych. Zbiór trójwymiarowych współrzędnych punktów wskazał przebieg osi konstrukcyjnej obiektu, która zgodnie z przyjętą metodą stanowi równocześnie oś przestrzennego rozwinięcia. Parametry linii w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów [**Snow i Schaffrin, 2016**]. W oparciu o równanie prostej wyznaczono współrzędne horyzontalne x i y punktów znajdujących się na wysokości najniższego i najwyższego z wygenerowanych przekrojów poprzecznych. W oparciu o współrzędne punktów wyznaczono wartości kątów α i β , w oparciu o które zrealizowano sekwencję dwóch elementarnych rotacji wokół osi OZ i OY (4.27). Po przeprowadzeniu procesu pionizacji chmury punktów stwierdzono niekorzystny z punktu widzenia czytelności przestrzennego rozwinięcia podział jednego z elementów funkcjonalnych konstrukcji. Dla wyeliminowania tej niedogodności zastosowano dodatkową rotację wokół osi OZ (4.32), która doprowadziła zbiór przestrzenny do pożądanej orientacji kątowej. W efekcie w przeprowadzonym później rozwinięciu nie nastąpił podział omawianego elementu na dwie części.



Rys. 6.9. Chmura punktów wieży ciśnień z wyszczególnionymi przekrojami poprzecznymi (a) oraz geometria tych przekrojów w rzucie perspektywicznym (b) i ortogonalnym (c) z góry.

Chmura punktów po zakończeniu wstępnego opracowania danych została poddana procedurze przestrzennego rozwinięcia na pobocznicy walca (4.31). Z racji występowania najliczniejszego zbioru punktów na określonej odległości 6.5 m od pionowej osi rozwinięcia, przyjęto tę długość jako promień walca (powierzchni pierwotnej). Wartość ta minimalizowała wpływ zniekształceń odwzorowawczych dla najliczniejszego podzbioru punktów w chmurze. Rezultat procedury przestrzennego rozwinięcia przedstawiono na **Rys. 6.10**. W ramach powstałej chmury punktów wartości parametru głębokości przyjmują wartości od 0 do 8 m (4.29). Pełen zakres odległości występuje w przypadku punktów właściwych dla pokrycia dachowego. Punkty reprezentujące dach znajdują się zarówno w pobliżu osi rozwinięcia (iglica wieży), jak również w największej odległości od niej (najniższe punkty pokrycia dachu). Pozostałe punkty przedstawiające ściany budowli cechuje zdecydowanie mniejsza zmienność wartości parametru głębokości. Niemniej, przy próbie przedstawienia wszystkich punktów ścian razem ograniczona rozdzielczość skali kolorów nie pozwala na szczegółową prezentację ukształtowania przebiegu powierzchni ścian wieży. W celu przedstawienia tej charakterystyki zasadnym było podzielić chmurę punktów na mniejsze niezależne podzbiory i w obrębie każdego z nich zastosować dostępną skalę kolorów dla mniejszego zakresu parametru głębokości. Dzięki temu osiągnięto pożądaną szczegółowość opracowania.

Wynikową rozwiniętą chmurę podzielono na cztery części, które zaprezentowano osobno w dalszej części rozdziału. W ramach każdej części przyjęto niezależny zakres palety kolorów symbolizujących odległość poszczególnych punktów chmury od pionowej osi rozwinięcia. Stąd występująca na **Rys. 6.10** kolorystyka nie jest jednolita i ma charakter poglądowy. Szczegółowe parametry geometryczne zostały przedstawione odrębnie dla każdego fragmentu chmury punktów. Na rysunku zaznaczono orientację osi układu współrzędnych przestrzennego rozwinięcia. Kierunek osi X^R należy utożsamiać z przesunięciem wzdłuż okrągłej elewacji wieży ciśnień w przestrzeni nieprzetworzonej chmury punktów. Oś Y^R jest tożsama z wysokością obiektu, a ostatnia oś Z^R stanowi kierunek, wzdłuż którego przedstawiany jest parametr głębokości odwzorowania. **Rys. 6.10** zawiera ponadto główne kierunki wskazujące orientację horyzontalną poszczególnych punktów, które odpowiadają orientacji w pierwotnej, nierozwiniętej chmurze.

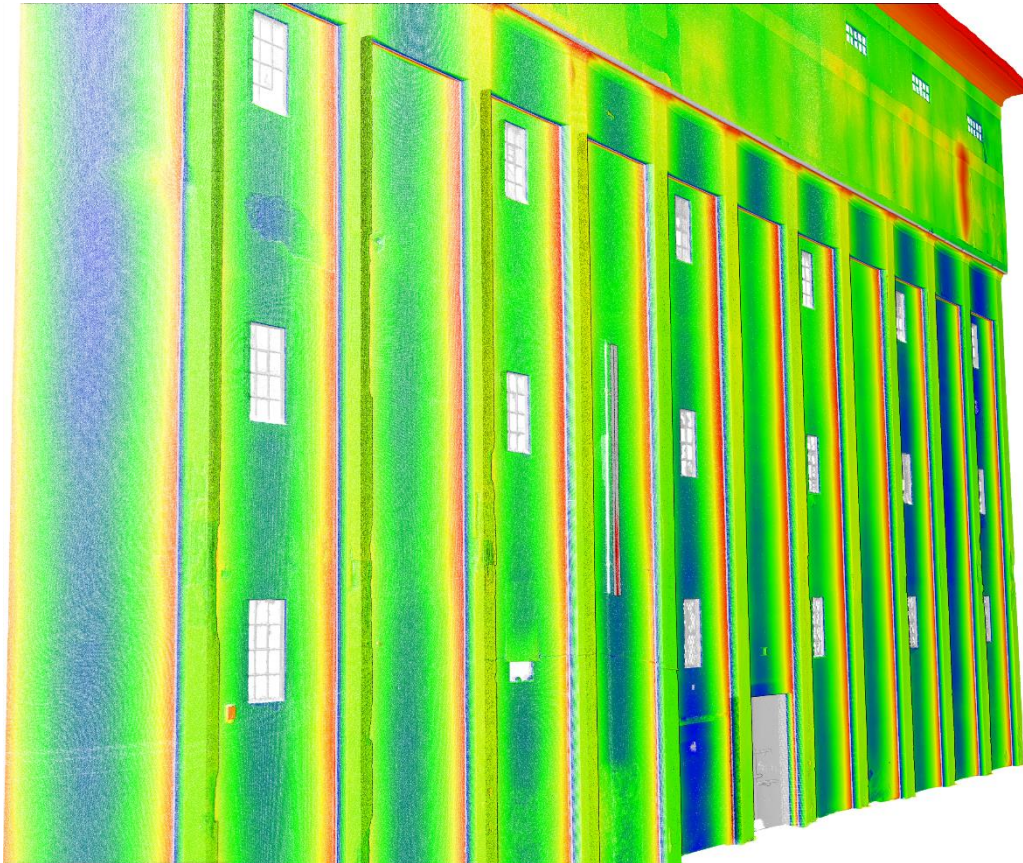


Rys. 6.10. Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów wieży ciśnień na pobocznicy walca w rzucie perspektywicznym ukośnym dowolnym.

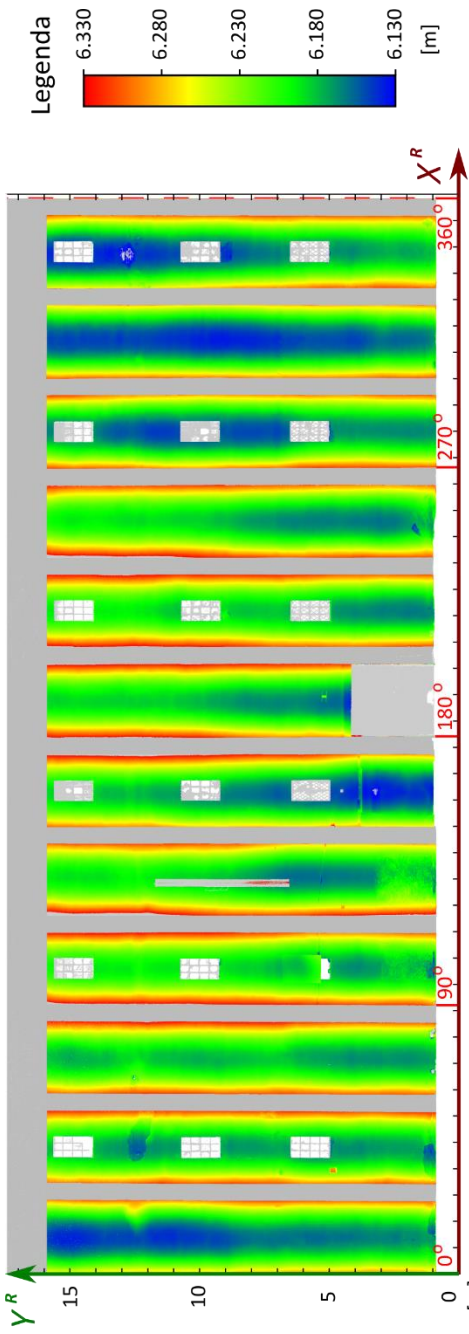
Podział chmury punktów przestrzennego rozwinięcia na mniejsze części został przeprowadzony na podstawie odnotowanych cech charakterystycznych przekrojów poprzecznych (**Rys. 6.9**). W celu zawężenia zakresu wartości parametru głębokości wydzielono cztery zasadnicze części funkcjonalne chmury. Pierwszą z nich stanowią płaskie fragmenty ścian wydłużonych w kierunku pionowym (**Rys. 6.11**). Druga część dotyczy wypustów oddzielających wspomniane płaskie ściany od siebie, wraz z wieńczącym je i obejmującym obrys całej budowli poziomym łącznikiem (**Rys. 6.12**). Trzecią częścią chmury punktów jest posiadająca ściśle walcowy profil powierzchnia zbiornika na wodę (**Rys. 6.13**). Ostatnim, czwartym elementem wprowadzonego podziału jest konstrukcja dachu, która z racji stożkowego kształtu obejmuje pełen zakres odnotowanych wartości parametru głębokości (**Rys. 6.14**). Na rysunkach z racji przedstawienia wybranych fragmentów elewacji wieży występują różne zakresy wysokości właściwe dla tych fragmentów. W ujęciu przestrzennego rozwinięcia wartości te są odkładane wzdłuż osi Y^R układu współrzędnych.

Dla lepszej orientacji na **Rys. 6.11 – 6.14** załączono pomocnicze zobrazowanie nierozwiniętej chmury punktów przedstawiające oznaczone w kolorze czerwonym fragmenty, których dotyczy dane przestrzenne rozwinięcie. zostały przedstawione na kolejnych ilustracjach. W każdym przypadku dołączono legendę z wartościami parametru głębokości umożliwiającą interpretację zastosowanej kolorystyki. **Rys. 6.12 - 6.15** stanowią widoki ortogonalne rozwinięcia z góry, o czym świadczy obecność jedynie dwóch osi układu (X^R i Y^R) oraz dołączone linie wskazujące orientację kątową punktów. Obecny na **Rys. 6.12 i 6.13** zakres wartości parametru głębokości wynika z zastosowania procedury przestrzennego rozwinięcia na płaskich fragmentach ścian wieży ciśnień oraz wypustów. W przypadku niemal każdej ściany można odnotować zmieniającą się od środka ścian do zewnętrznych krawędzi wartość parametru głębokości (**Rys. 6.12**). Zastosowanie przestrzennego rozwinięcia chmury punktów pozwala na przedstawienie obecności zaburzeń w jednolitej i płaskiej strukturze kolejnych 12 ścian otaczających obiekt. Miejscami w części środkowej środkowej ścian występują różnice rzędu kilku centymetrów (np. 8. ściana na kierunku 250° i 11. ściana na kierunku 310°). Cechę płaszczyznowości posiadają również wypusty rozdzielające ściany oraz ich górne połączenia (**Rys. 6.13**). Podobnie jak w przypadku ścian, można i odnotować ich niejednorodną strukturę geometryczną. Na ilustracji widoczne są dodatkowo ubytki i wykruszenia krawędzi niektórych wypustów.

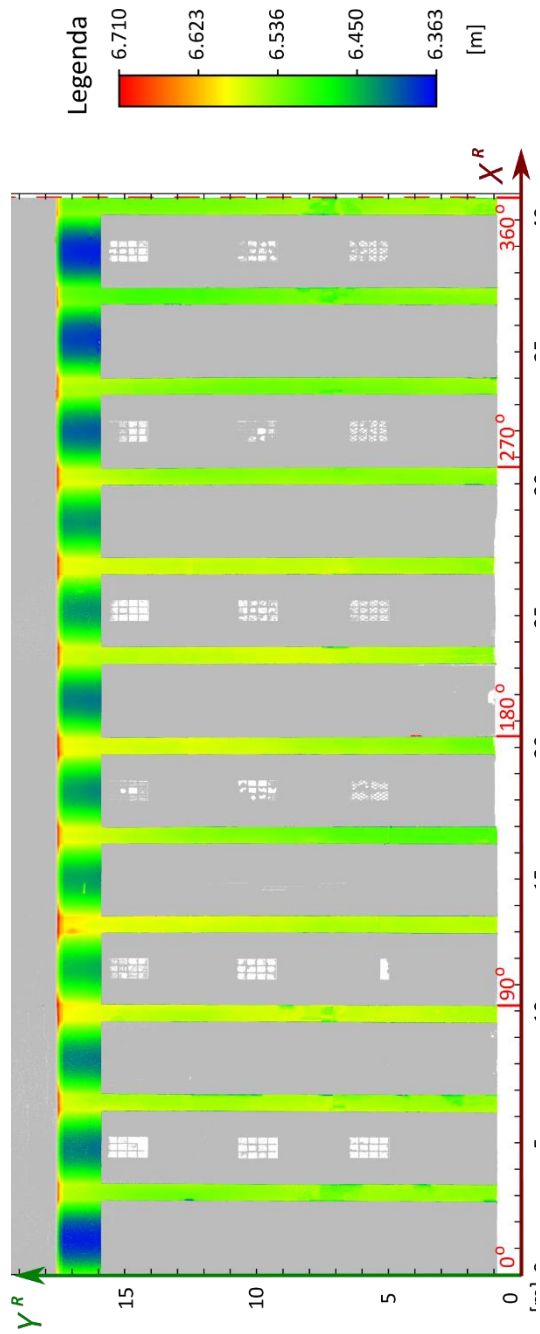
Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów może być również rozpatrywane z innych perspektyw niż ortogonalna, np. w konwencji perspektywicznej odpowiadającej w nierozwiniętej chmurze zbliżonej do pionowej (**Rys. 6.11**). W efekcie uzyskiwany jest widok, który zawiera zobrazowanie całości elewacji wieży ciśnień w pojedynczym opracowaniu. Zaletą rozwiązania jest znaczne skrócenie czasu potrzebnego na analizę struktury i rozkładu geometrycznego elewacji budowli. Forma przestrzennego rozwinięcia powoduje, że nie występuje konieczność wykonywania dodatkowych obrotów chmury punktów w celu dostosowania widoku do przedstawienia konkretnego fragmentu wieży. Rozwinięta chmura punktów dzięki dołączonemu atrybutowi parametru głębokości przedstawia w pojedynczym widoku charakter zniekształceń całej powierzchni bocznej obiektu.



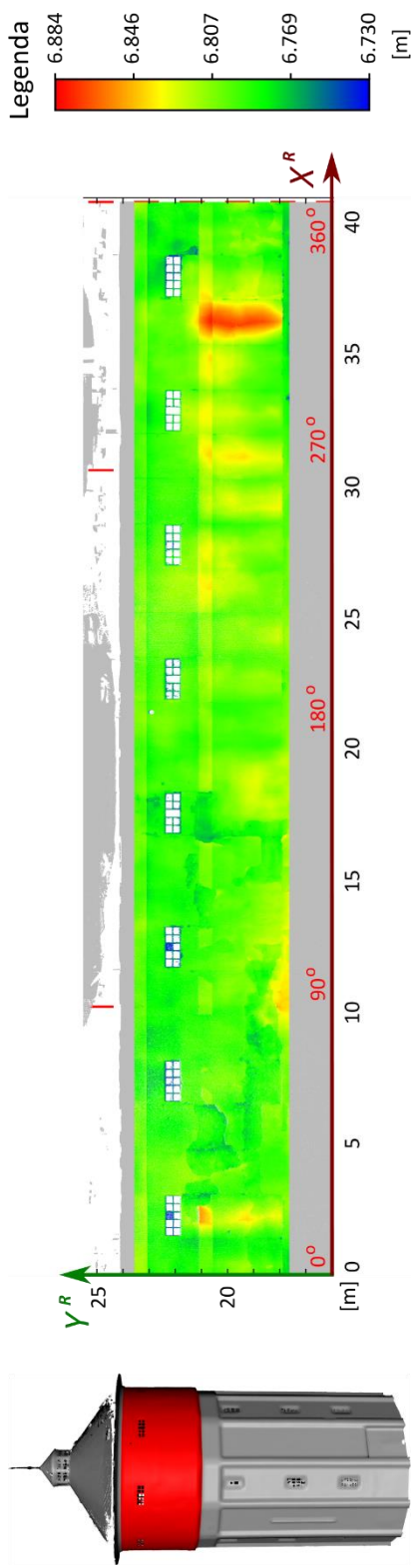
Rys. 6.11. Fragment elewacji wieży ciśnień ukazany w jednym widoku przestrzennego rozwinięcia chmury punktów.



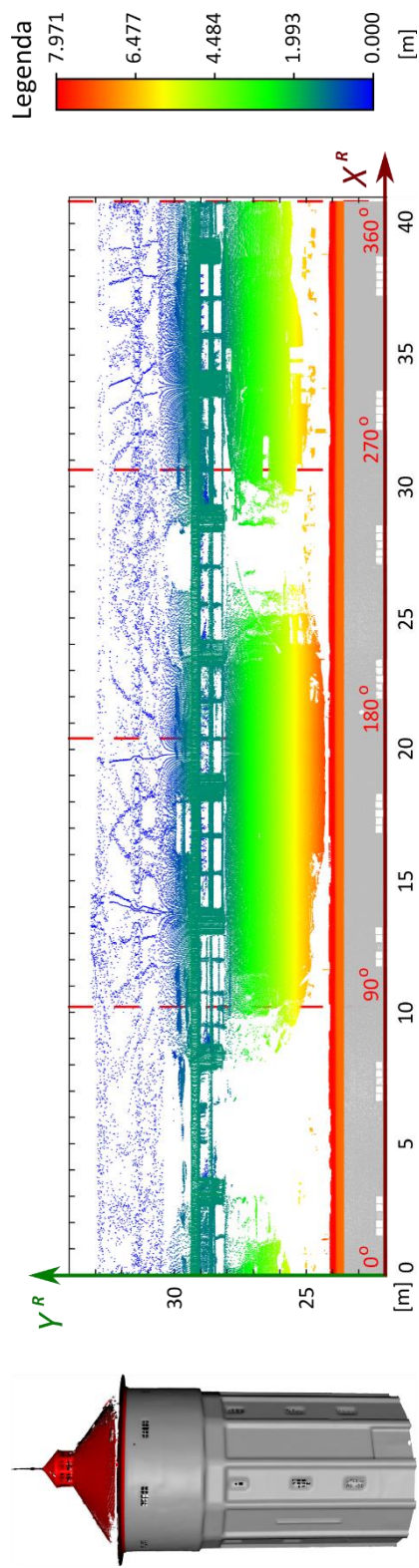
Rys. 6.12. Przestrzenne rozwinięcie pierwszej części rozwiniętej chmury punktów wieży ciśnień.



Rys. 6.13. Przestrzenne rozwinięcie drugiej części rozwiniętej chmury punktów wieży ciśnień.



Rys. 6.14. Przestrzenne rozwinięcie trzeciej części rozwiniętej chmury punktów wieży ciśnień.



Rys. 6.15. Przestrzenne rozwinięcie czwartej części rozwiniętej chmury punktów wieży ciśnień.

6.3 Rozwinięcie na powierzchnię sfery – planetaria UMG i AMW

Zastosowanie metody przestrzennych rozwinięć chmur punktów obiektów sferycznych sprawdzono na przykładzie planetariów dwóch gdyńskich uczelni morskich: Uniwersytetu Morskiego (UMG) oraz Akademii Marynarki Wojennej im. Bohaterów Westerplatte (AMW). Argumentem wskazującym na celowość wykonania niniejszej analizy porównawczej jest wzajemna zgodność wymiarów rozpatrywanych obiektów. W obu przypadkach promień sferycznych sklepień planetariów wynosi 4 m, co zostało potwierdzone w trakcie opracowania pomierzonych chmur punktów. Materiał źródłowy do analiz został pozyskany w wyniku pomiaru obiektów za pomocą skanera laserowego Trimble TX8 (**Rys. 6.16**). W celu pełnej inwentaryzacji powierzchni sklepień instrument zlokalizowany był na trzech (UMG) oraz pięciu (AMW) stanowiskach pomiarowych wewnątrz pomieszczeń. Pozyskane na każdym stanowisku chmury punktów cechowały odrębne lokalne układy współrzędnych. Połączenie chmur punktów w jeden zbiór danych (rejestracja) wymagała określenia charakterystycznych punktów lub płaszczyzn wspólnych jednoznacznie identyfikowalnych na sąsiednich stanowiskach. Pozyskanie parametrów geometrycznych obiektów łączących przeprowadzono w oprogramowaniu Trimble RealWorks metodą wpasowania „chmura-chmura” (UMG) oraz za pomocą zidentyfikowanych środków geometrycznych umieszczonych w pomieszczeniu znaczników (kul o promieniu 0.10 m) (AMW). W obu przypadkach uzyskano błąd rejestracji wynoszący 2 mm, co potwierdza wiarygodność i wysoką dokładność pozyskanych danych pomiarowych.



Rys. 6.16. Aparatura pomiarowa w planetarium AMW w Gdyni ze wskazaniem (czerwone strzałki) wybranych kul służących do późniejszej rejestracji chmur punktów.

Dysponując zarejestrowanymi (połączonymi) chmurami punktów planetariów przystąpiono do określenia powierzchni pierwotnych obiektów. W tym celu wyselekcjonowano dwie podchmury składające się jedynie z punktów pomierzonych na sklepieniach. Powszechnym zjawiskiem występującym w opracowaniu chmur punktów jest nadmiar danych wynikający z nakładania się punktów pochodzących z sąsiednich stanowisk pomiarowych. Kolejnym krokiem było zatem przeprowadzenie próbkowania skutkującego powstaniem wysokorozdzielczych zbiorów o wzajemnej odległości pomiędzy punktami wynoszącej 2 mm. Chmury punktów reprezentujące sklepienia planetariów składały się z 2.87 (UMG) oraz 3.30 (AMW) milionów punktów. Stanowiły one wyjściowe zbiory danych użyte w dalszych analizach. Zakładając sferyczny kształt sklepień planetariów służących do wizualizacji sfery niebieskiej, do wyznaczenia parametrów estymujących geometryczny środek bryły

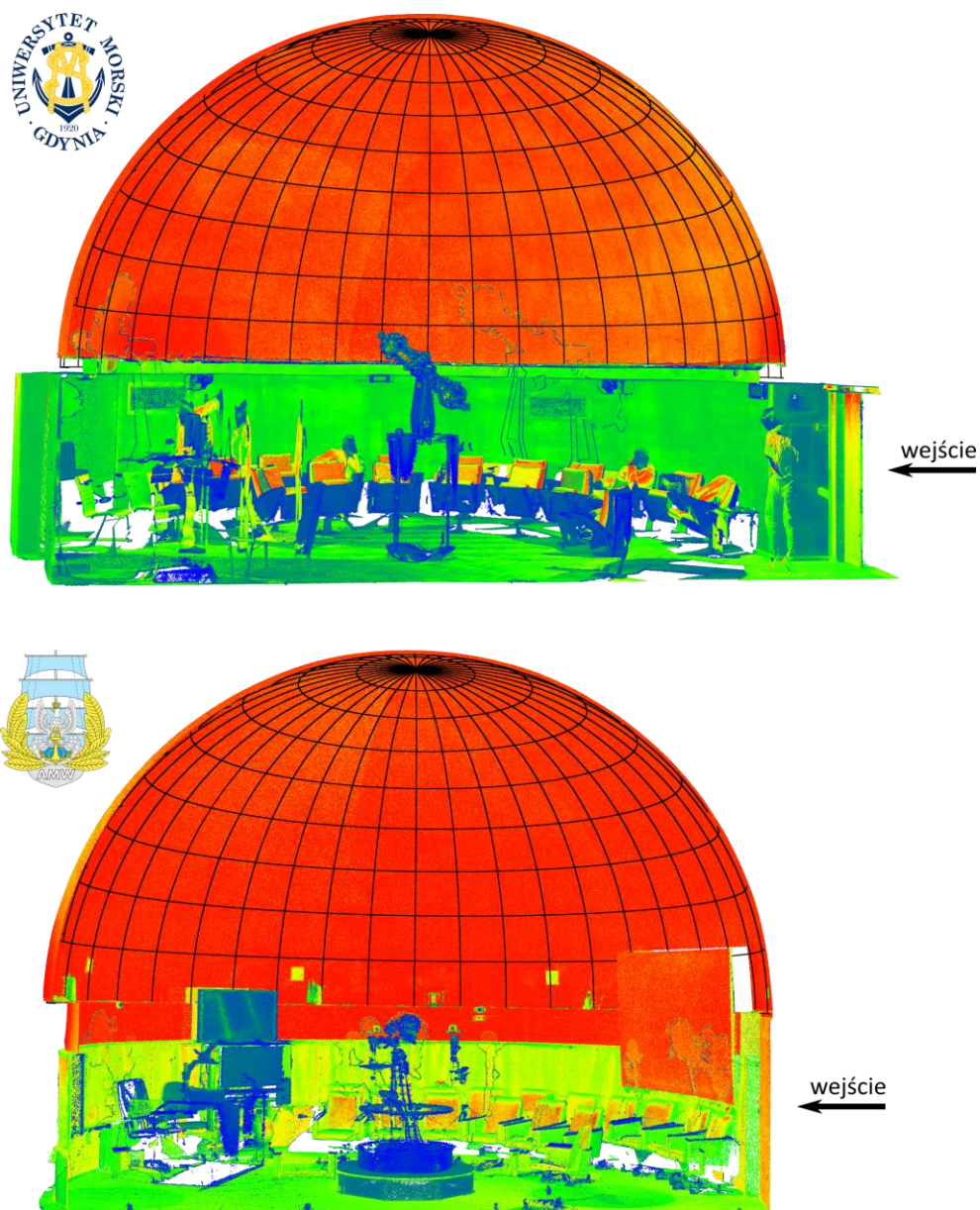
oraz długość promienia wykorzystano metodę Random Sample Consensus (RANSAC) przedstawioną m.in. w [Schnabel i in., 2007]. W obu przypadkach uzyskano promienie zbliżone do 4 m. Chmura punktów sklepienia planetarium UMG cechowała się promieniem o długości 3.9836 m wyznaczonym z błędem średnim 0.0033 m. Z kolei promień sklepienia planetarium AMW wyniósł 3.9901 m przy błędzie średnim wyznaczenia jego wartości równym 0.0086 m. Wartości błędów średnich wyjściowo sygnalizują większe odbieganie kształtu sklepienia planetarium AMW od idealnej figury sfery niż w przypadku UMG. Wniosek ten znalazł potwierdzenie w wynikach analiz przedstawionych w dalszej części rozdziału. W związku z otrzymanymi wartościami charakteryzującymi oba obiekty za powierzchnię pierwotną przestrzennego rozwinięcia przyjęto sferę o długości promienia wynoszącej 4 m.

Położenie poszczególnych punktów z chmur w kolejnym etapie parametryzacji wyrażono w postaci współrzędnych sferycznych: ϑ – kąt w płaszczyźnie wertykalnej liczony od kierunku pionu w geometrycznym środku sfery, φ – kąt w płaszczyźnie horyzontalnej liczony od wschodniego kierunku początkowego, r – odległość punktu od środka sfery zgodne z formułą (4.36). Wyznaczone krzywoliniowe współrzędne sferyczne ϑ , φ wyrażały położenie punktu w układzie linii parametrycznych powierzchni pierwotnej (oryginału). Wygenerowany przebieg linii parametrycznych wraz z pomierzonymi chmurami punktów przedstawiono na **Rys. 6.17**. W celu wizualizacji przebiegu linii parametrycznych wewnątrz pomieszczenia koniecznym było zawężenie wyświetlanej przestrzeni chmury punktów do połowy jej przestrzeni. Bez przeprowadzenia tej operacji z każdej perspektywy zewnętrznej widoczne byłyby jedynie ściany i sklepienie planetarium bez możliwości przyjrzenia się temu, co znajduje się wewnątrz. Przykład ten ponadto ilustruje tematykę wzajemnego przesłaniania się poszczególnych fragmentów chmury punktów, która jest jednym z zagadnień problemowych rozprawy doktorskiej.

Chmury punktów na **Rys. 6.17** przedstawione są w kolorystyce intensywności odbicia wiązki lasera. Oba obiekty ukazano w jednakowej perspektywie z wejściem po prawej stronie. Pusta przestrzeń widoczna po prawej stronie ilustracji planetarium AMW wskazuje na brak pomierzonych tam punktów z racji przesłonięcia fragmentu sklepienia planetarium przez ekran zamontowanego na ścianie obiektu monitora. Stąd też odpowiadający mu brakujący fragment pojawi się w przestrzennym rozwinięciu chmury punktów. Współrzędne sferyczne punktów ϑ , φ , r w kolejnym etapie opracowania danych stanowiły argumenty funkcji odwzorowawczych przestrzennego rozwinięcia chmury punktów. Dysponując znaną długością promienia powierzchni pierwotnej sfery wynoszącą $R = 4$ m, możliwym było określenie lokalnych odchyłeń rzeczywistego przebiegu sklepień planetariów od założonego matematycznego modelu. W celu uzyskania pożądanej czytelnej struktury przestrzennego rozwinięcia chmury punktów (obrazu), zaadaptowano formuły odwzorowania azymutalnego równopolewego Lamberta (3.22), (3.23). Przestrzenne rozwinięcie sferycznego sklepienia planetariów ma postać chmury punktów przedstawiającej dla danej pary współrzędnych horyzontalnych wartości parametru głębokości odpowiadającej odstępowi od matematycznego sferycznego modelu sklepienia.

Trójwymiarowa struktura przestrzennego rozwinięcia została przedstawiona w widoku z góry w kolorystyce odpowiadającej uzyskanym wartościom odchyłeń rzeczywistego przebiegu sklepienia odniesionego do idealnej matematycznej powierzchni pierwotnej (parametr głębokości). Adaptacja w rozwinięciu formuł klasycznego odwzorowania azymutalnego normalnego równopolewego Lamberta pozwoliła na prezentację w jednym widoku całej krzywoliniowej struktury sklepień (**Rys. 6.18**). Zastosowane kryterium równopolewości zostało uwidocznione w postaci wskaźnic Tissota. Elipsy z racji rozmiaru przedstawianych obiektów oraz uniknięcia pogorszenia czytelności opracowania pomniejszono czterokrotnie. Półosiąmi wskaźnic są elementarne skale długości w kierunkach głównych

odwzorowania. Iloczyn wymienionych skal długości daje skalę pól odwzorowania (3.17), (3.18). Dołączona na ilustracji podziałka liniowa umożliwia określenie odległości liczonej po krzywoliniowym przebiegu sklepienia. W celu określenia prawidłowych wartości należy pamiętać o uwzględnieniu skali długości w zadanym kierunku, który można odczytać ze wskaźnicy Tissota.



Rys. 6.17. Fragmenty pomierzonych chmur punktów planetariów UMG (u góry) i AMW (na dole) z dodanym przebiegiem linii parametrycznych sfery aproksymującej kształt sklepień.

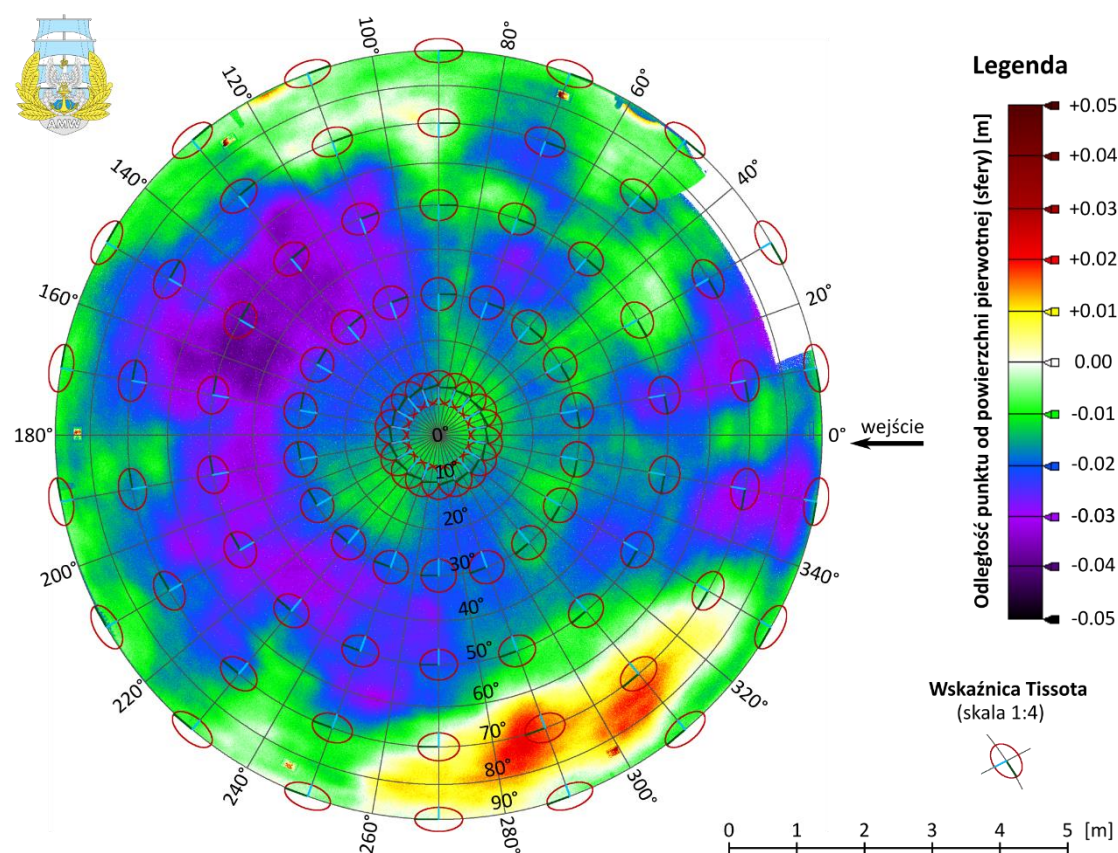
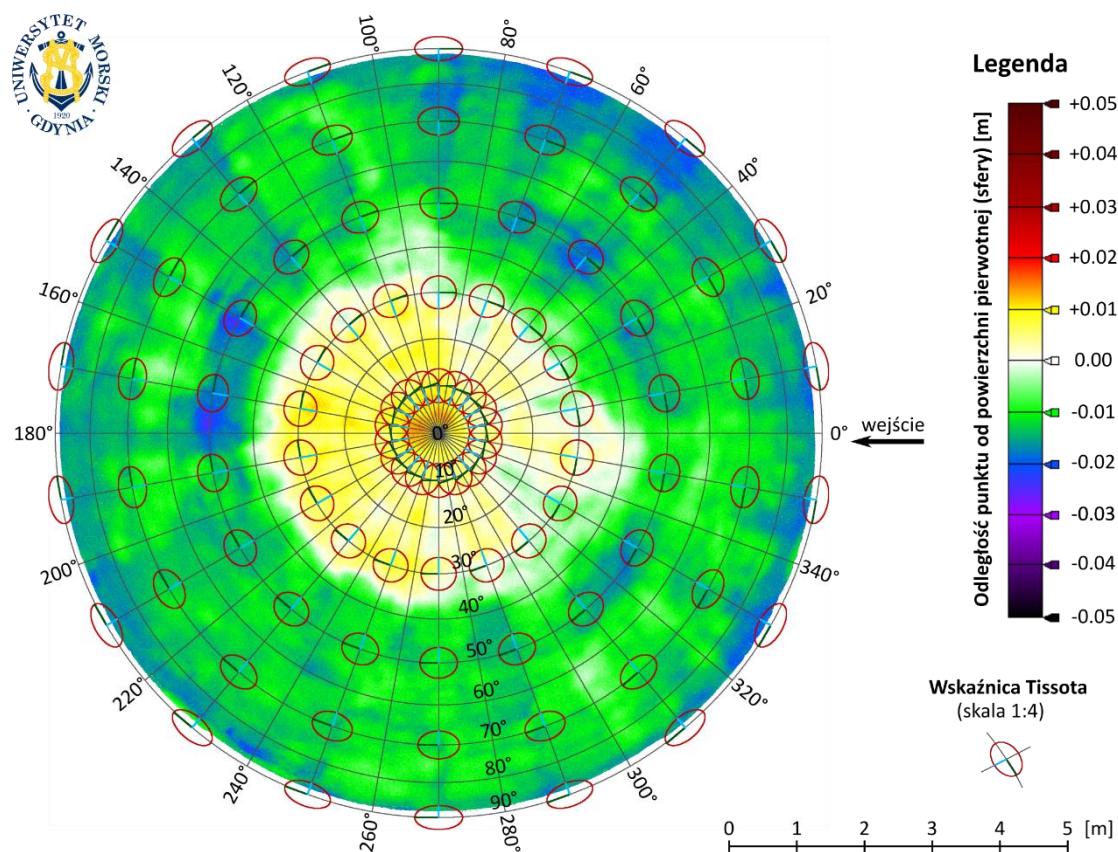
Odwzorowanie azymutalne równopolowe Lamberta zaadaptowane w powyższym rozwiązaniu znajduje zastosowanie w przedstawianiu obszaru całych kontynentów oraz hemisfer Ziemi [Snyder, 1987]. Do szczegółowego przedstawiania obszarów o mniejszej powierzchni wykorzystuje się odwzorowanie walcowe poprzeczne wiernokątne Gaussa-Krügera oraz jego modyfikacje. Ustawodawstwo polskie przewiduje wykorzystanie dwóch układów współrzędnych bazujących na odwzorowaniu Gaussa-Krügera do przedstawiania terytorium Rzeczypospolitej Polskiej – PL-1992 oraz PL-2000 [Rozporządzenie, 2012]. Układy te różnią się między sobą szerokościami pasów południkowych oraz współczynnikiem skali południków osiowych. Układ PL-1992 obejmuje obszar

całej Polski jedną strefą pomiędzy południkami $14^{\circ} 00' E$ i $24^{\circ} 30' E$ z południkiem osiowym $19^{\circ} E$ i wartością współczynnika zmiany skali na południku $m_0 = 0.9993$. Z kolei układ PL-2000 stanowią cztery trzystopniowe strefy południkowe z południkami osiowymi $15^{\circ} E$, $18^{\circ} E$, $21^{\circ} E$, $24^{\circ} E$ i współczynnikiem $m_0 = 0.999923$ [Kadaj, 2001]. Układy współrzędnych wykorzystywane są do tworzenia map wielkoskalowych na potrzeby prac geodezyjnych w skalach od 1 : 500 000 do 1 : 10 000 (PL-1992) oraz w skalach większych od 1 : 10 000 (PL-2000). Istotną zaletą wynikającą ze stosowania odwzorowania Gaussa-Krügera oraz jego modyfikacji jest, poza właściwością wierności, obecność stosunkowo niewielkich zniekształceń odległości ($- 0.7 \text{ m/km}$ i $- 7.7 \text{ cm/km}$ na południku osiowym odpowiednio w układzie PL-1992 i PL-2000) [Rozporządzenie, 2012], [Kadaj, 2001]. W literaturze występują stabelaryzowane opracowania zawierające wartości wybranych współczynników rozwinięć funkcji odwzorowawczych w szereg Taylora, które wspomagają proces obliczania współrzędnych w odwzorowaniu [König i Weise, 1951].

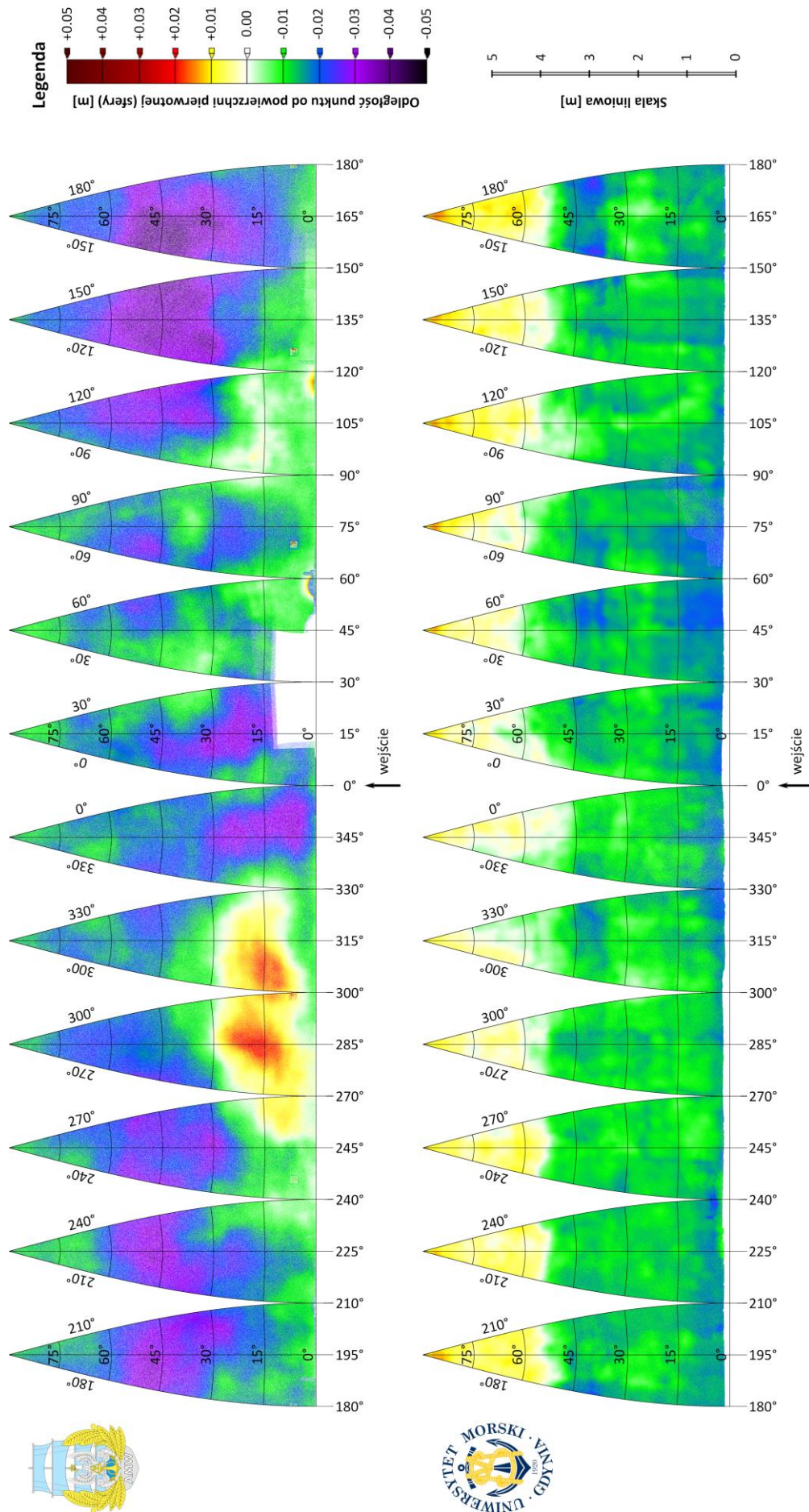
Wydzielanie w strefach kilkustopniowych zakresów długości geograficznej warunkuje uzyskanie niewielkich zniekształceń odległości. Strefy południkowe, zwane również dwukątami elipsoidalnymi [Biernacki, 1973], ograniczają zakres przedstawianej powierzchni podstawowej (sfery bądź elipsoidy obrotowej) do wąskiego pasa zawartego pomiędzy południkami granicznymi strefy. Zobrazowanie zatem całej powierzchni podstawowej wymagałoby zdefiniowania $360^{\circ} / n$ niezależnych pasów odwzorowawczych, gdzie n oznacza szerokość strefy w stopniach przy założeniu otrzymania w wyniku całkowitej wielokrotności dzielnika. W wyniku odwzorowania współrzędnych krzywoliniowych (kątów w płaszczyźnie poziomej i pionowej) w oparciu o południk osiowy, w każdej z rozpatrywanych stref uzyskuje się współrzędne płaskie z jednakowego zakresu wartości [Deakin i in., 2010]. Wynika to z przyjętych szerokości pasów południkowych odniesionych do południków środkowych strefy. Rozróżnienie położenia punktów pomiędzy kolejnymi strefami południkowymi wymaga zatem wprowadzenia dodatkowych parametrów właściwych danej strefie. Przykładowo w państwowym układzie współrzędnych płaskich PL-2000 do współrzędnej wschodniej y dodawane są dwie dodatkowe stałe liczbowe [Gajderowicz, 2009]. Pierwsza z nich, wynosząca 500 000 m, wyklucza możliwość występowania w trzystopniowym pasie ujemnych wartości współrzędnych. Operacja ta wykonywana w każdej strefie nie zapewnia unikalności współrzędnych w strefach. Dopiero wprowadzenie drugiej stałej, uzależnionej od numeru pasa południkowego, wprowadza pożądaną cechę jednoznaczności współrzędnych ($L_0 / 3^{\circ} \cdot 1\,000\,000 \text{ m}$, gdzie L_0 oznacza długość geodezyjną południka osiowego strefy) [Rozporządzenie, 2012].

Na obszarze Polski, obejmującym w przybliżeniu do 10 minut stopniowych zakres długości geodezyjnych od $14^{\circ} E$ do $24^{\circ} E$ występują cztery trzystopniowe pasy południkowe. Przyjmując konwencję wykorzystania formuł odwzorowania Gaussa-Krügera w pasach południkowych oraz dodania odpowiednich stałych do współrzędnych, możliwe jest zestawienie odwzorowanych stref kolejno po sobie i przedstawienie tym sposobem całej powierzchni pierwotnej. Zastosowanie wąskich pasów południkowych (np. trzystopniowych lub sześciostopniowych) dla przedstawienia w jednym przestrzennym rozwinięciu chmury punktów obiektu sferycznego powodowałoby występowanie dużej liczby pasów (odpowiednio 120 i 60), co nie wpłynęłoby korzystnie na czytelność opracowania. Zasadnym zatem jest przyjęcie większej szerokości kątowej stref dla poglądowego przedstawienia struktury geometrycznej chmury punktów.

Realizację przestrzennych rozwinięć chmur punktów sklepień planetariów z wykorzystaniem odwzorowania Gaussa-Krügera przeprowadzono w oparciu o dwanaście 30-stopniowych pasów (Rys. 6.19). Z powodu obecności powierzchni pierwotnej w postaci sfery o promieniu 4 m niewłaściwym byłoby określanie stałych wartości linii parametrycznych w płaszczyznach pionowych mianem



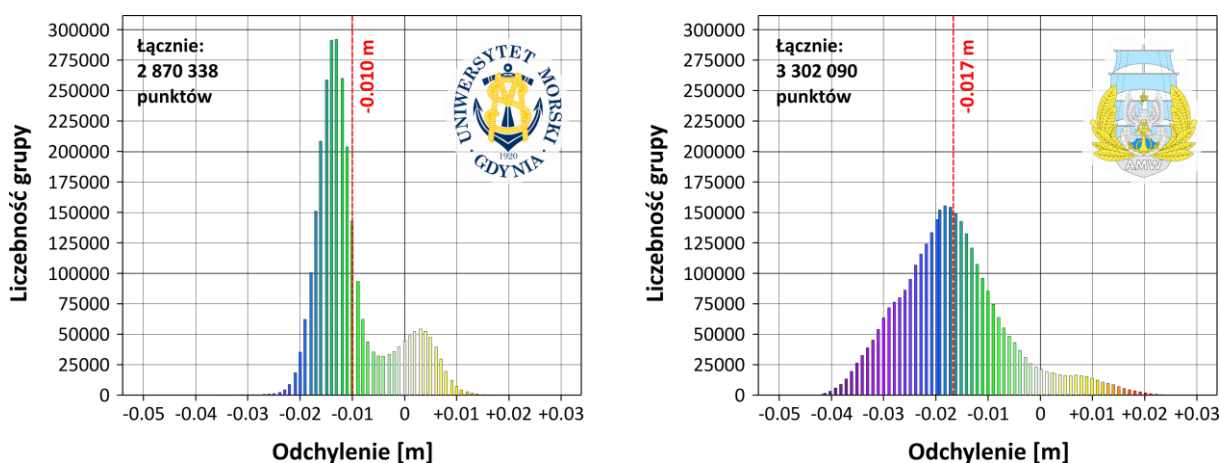
Rys. 6.18. Przestrzenne rozwinięcia chmur punktów sklepień planetariów UMG i AMW skonstruowane w oparciu o odwzorowanie azymutalne normalne równopolewe Lamberta.



Rys. 6.19. Przestrzenne rozwinięcie sklepień planetariów AMW (u góry) i UMG (na dole) zbudowane w oparciu o odwzorowania walcowe poprzeczne Gaussa-Krügera.

południków, które zarezerwowane są dla sfery reprezentującej glob ziemski. Wycinek powierzchni sfery objęty przedmiotową analizą obejmuje jedynie północną hemisferę, zatem odstąpiono od prezentacji całości pasów i jedynie zasygnalizowano dalszy przebieg wertykalnych linii parametrycznych poniżej linii parametrycznej $\vartheta = 90^\circ$. W ramach każdego z pasów zachowany jest warunek równokątności oraz zapewniona jest możliwość odczytania wartości odległości skażonych zniekształceniem liniowym odwzorowania współrzędnych płaskich. Legenda zawiera wyznaczone odchylenia rzeczywistego przebiegu sklepienia względem powierzchni pierwotnej oraz podziałkę liniową. Na obu ilustracjach zachowano jednakową kolorystykę pozwalającą na sformułowanie wniosków o rozkładzie odchyleń w przypadku obu planetariów. Podobnie jak na **Rys. 6.18** zaznaczono dla orientacji przestrzennej kierunku wejść do obu pomieszczeń.

Z **Rys. 6.18** i **Rys. 6.19** wynika iż powierzchnia planetarium UMG jest mniej zróżnicowana i bardziej zbliżona do pierwotnego sferycznego kształtu niż powierzchnia planetarium AMW. W przeważającej części odchylenia przyjmują wartości z zakresu od -0.01 m do $+0.01$ m. W najwyższej części (zakres wartości kąta pionowego od 0° do 40° patrząc od kierunku pionu w dół) sklepienie planetarium UMG przebiega powyżej powierzchni sfery referencyjnej o promieniu 4 m. Poniżej tej granicy występują ujemne wartości odchyleń dochodzące do -0.025 m. Kształt sklepienia planetarium AMW jest znacznie bardziej zróżnicowany i określony odchyleniami z szerszego zakresu obejmującego wartości od -0.04 m do $+0.025$ m. Znacząca część powierzchni sklepienia przebiega poniżej przyjętej sfery odniesienia. Jedynie na kierunkach od 260° do 330° w zakresie kąta pionowego od 60° do 90° odnotowano pozytywne wartości odchyleń. Podobnie jak w przypadku przedstawionym na **Rys. 6.18** zastosowano jednakową orientację przestrzennych rozwinięć chmur punktów. Kierunkiem początkowym w obu przypadkach jest środek wejścia do obiektu, dzięki czemu ułatwione jest odniesienie przedstawionych na opracowaniu wyników do wnętrza pomieszczeń. Przyjęta konwencja linii parametrycznych obrazu ułatwia orientację i wskazanie konkretnych fragmentów opracowania na powierzchniach sklepień planetariów. Na uwagę zasługuje brak części danych pomiarowych w przypadku sklepienia planetarium AMW sygnalizowany we wcześniejszym paragrafie opisującym przebieg linii parametrycznych powierzchni oryginału (sfery). Statystyczne ujęcie wartości odchyleń przedstawiono na **Rys. 6.20**.



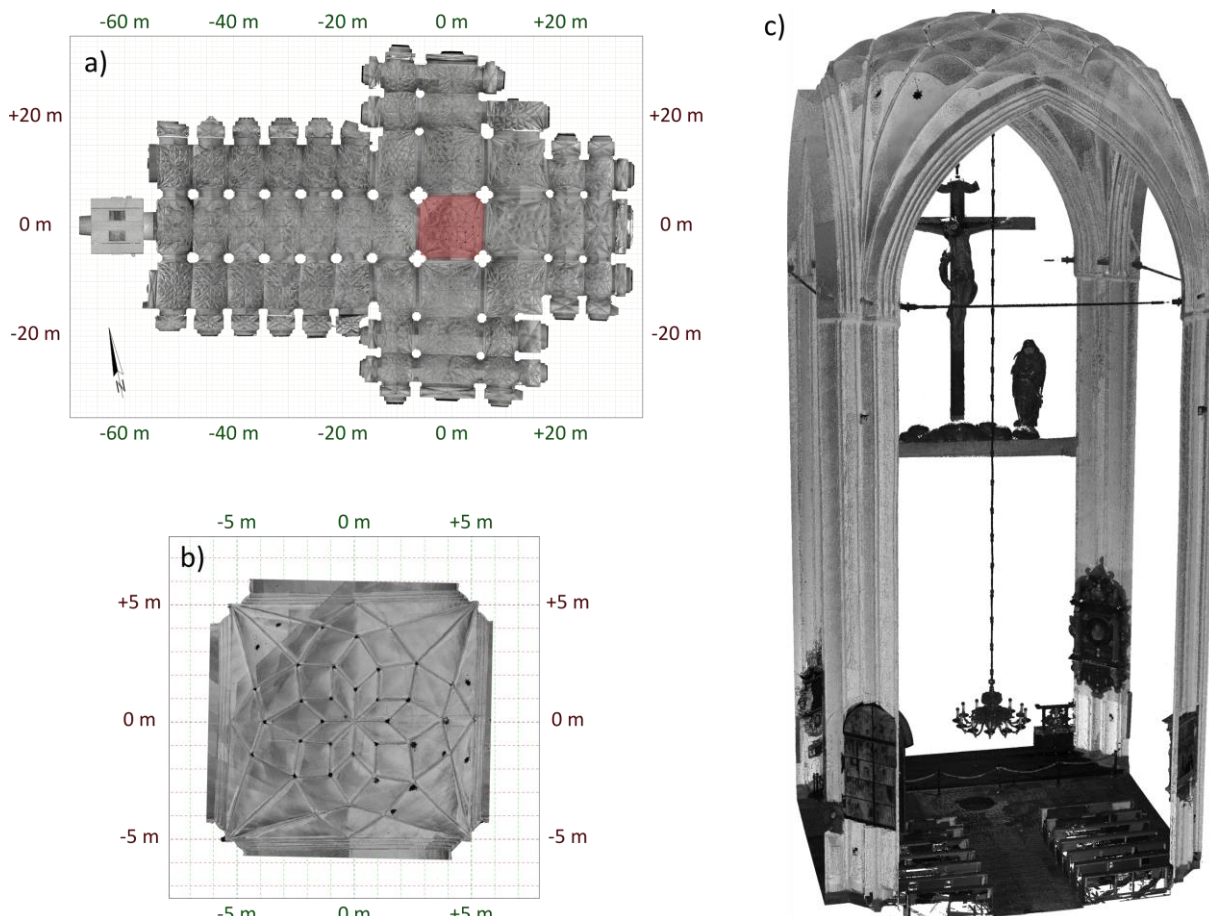
Rys. 6.20. Histogramy wartości odchyleń pomierzonych punktów sklepień planetariów UMG (po lewej) i AMW (po prawej) od powierzchni pierwotnej (sfery).

Histogramy prezentują liczebność podzbiorów odchyleń od powierzchni sfery o promieniu 4 m. Z obu wykresów można wyciągnąć wniosek, że sklepienia obu planetariów stanowią powierzchnie przebiegające w znacznej części poniżej referencyjnej powierzchni sferycznej. Fragmenty sklepień

przekraczających granicę 4 m stanowią jedynie 13.5 % (UMG) i 7.7 % (AMW) całości populacji zarejestrowanych odchyłeń. Dodatkowo wartości odchyłeń przyjmują wartości do +1.5 cm (sklepienie planetarium UMG) oraz +2.5 cm (AMW). Jednocześnie w pierwszym przypadku występuje znacznie więcej odchyłeń bliskich wartościom zerowym z nieznaczną częścią przekraczającą 0.5 cm, podczas gdy w drugim odnotowano bardziej równomierny rozkład odchyłeń w przytoczonym zakresie przyjmowanych dodatnich wartości. Ujemne wartości odchyłeń rzeczywistej powierzchni sklepień od referencyjnej powierzchni sferycznej przeważają w znacznej mierze w obu rozważanych przypadkach. Większą rozpiętość ujemnych wartości odchyłeń stwierdzono w planetarium AMW (od -4.5 cm). W przypadku planetarium UMG odnotowano dolną ich granicę dla wartości -2.5 cm przy największej liczbie podzbiorów ujemnych odchyłeń zbliżonych do wartości -1.3 cm. Z kolei dla planetarium AMW analogiczną wartością było odchylenie bliskie -1.8 cm. Liczebności poszczególnych podzbiorów histogramu AMW były bardziej zbliżone do siebie niż w przypadku planetarium UMG. Wartościami odchyłeń określającymi oba obiekty są średnie arytmetyczne z wszystkich odnotowanych wartości wynoszące -0.010 m (UMG) oraz -0.017 m (AMW) stanowiącymi odpowiednio 0.26 % i 0.42 % długości 4-metrowego promienia sferycznego sklepienia obu planetariów.

6.4 Rozwinięcie na powierzchnię elipsoidy wydłużonej – sklepienie budynku sakralnego

Kolejnym obiektem symetrycznym rozpatrywanym w aspekcie przestrzennego rozwinięcia chmury punktów było jedno ze sklepień kryształowych Bazyliki Mariackiej w Gdańsku. Chmura punktów pochodzi z pomiarów przeprowadzonych impulsowym skanerem laserowym Trimble TX8. Do badań wybrano sklepienie położone na przecięciu się głównych osi budynku, tj. osi centralnej nawy i prezbiterium oraz osi naw bocznych (**Rys. 6.21**).

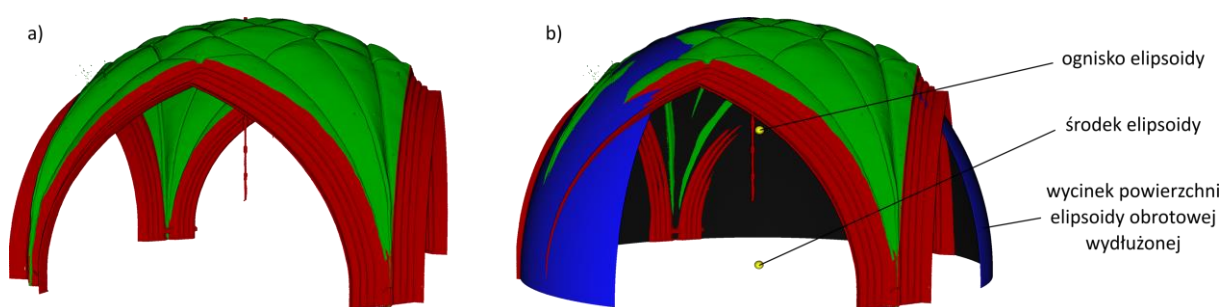


Rys. 6.21. Chmura punktów przedstawiająca sklepienie budynku sakralnego wybrane do przestrzennego rozwinięcia w widokach: ortogonalnym pogładowym z góry (a), ortogonalnym szczegółowym z góry (b) oraz perspektywicznym ukośnym (c).

Centralne sklepienie Bazyliki w wymiarze horyzontalnym ma wymiary kwadratu o boku 5 m (**Rys. 6.21 b**), a w wymiarze wertykalnym około 8.6 m. Filary konstrukcji dla dodatkowego zabezpieczenia usztywnione są za pomocą stalowych kotew o regulowanej długości (**Rys. 6.21 c**). Sąsiednie sklepienia budowli rozdzielone są łękami sklepiennymi (tzw. gurtami), które mają swój początek u szczytu filarów. Pomimo, że pierwotną powierzchnią sklepienia jest sfera, to w celu przedstawienia zastosowania przestrzennego rozwinięcia potraktowano ją jako elipsoidę obrotową wydłużoną (tj. elipsoidę o półosi wertykalnej dłuższej od półosi horyzontalnej). Powierzchnie łuków łączące sąsiednie sklepienia nie wchodzi w rozpatrywanym aspekcie przestrzennych rozwinięć w ich skład. Koniecznym było zatem odseparowanie z całości chmury punktów fragmentów przedstawiających nieelipsoidalne składowe sklepienia (**Rys. 6.22**). Operacja ta korzystnie wpływa

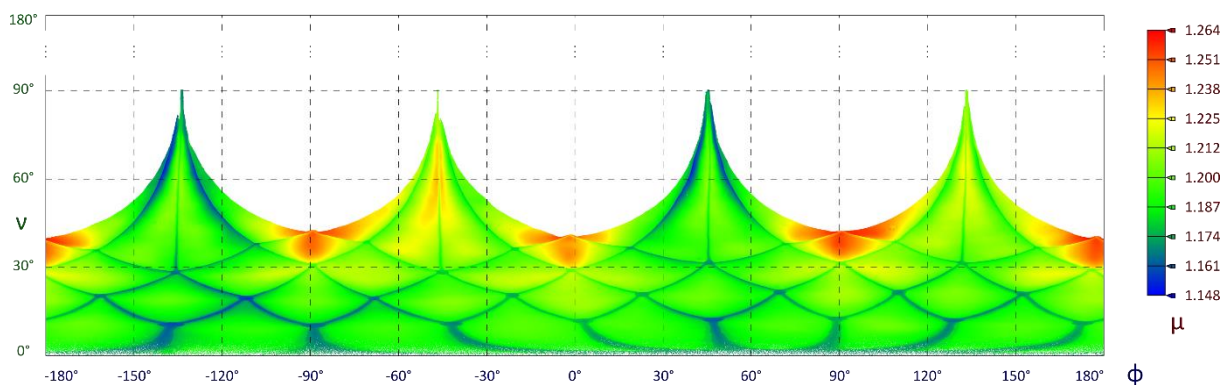
na estymację pierwotnej powierzchni rozwinięcia z racji wyeliminowania punktów do niej nie należących.

Przedstawione kolorem czerwonych fragmenty chmury punktów prezentują elementy nie wchodzące w skład założonego sklepienia elipsoidalnego. Wyselekcjonowana część chmury punktów sklepienia odpowiada powierzchni podstawowej, będącej w tym przypadku elipsoidą obrotową wydłużoną (**Rys. 6.22 b**). Algorytm estymacji polegał na zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów do wpasowania z jak najmniejszym błędem w dany zbiór punktów bryły elipsoidy obrotowej. W literaturze występują procedury, które umożliwiają wpasowanie w nieprzetworzonej chmurze punktów zawierającej szum [Demantke i in., 2011], [Serafin i Grisetti, 2015]. W przypadku nieodpornych rozwiązań wiązałyby się to z generowaniem znacznych błędów w wartościach estymowanych parametrów. W rezultacie geometria wyznaczonej elipsoidy różniłaby się od zakładanego kształtu sklepienia elipsoidalnego.



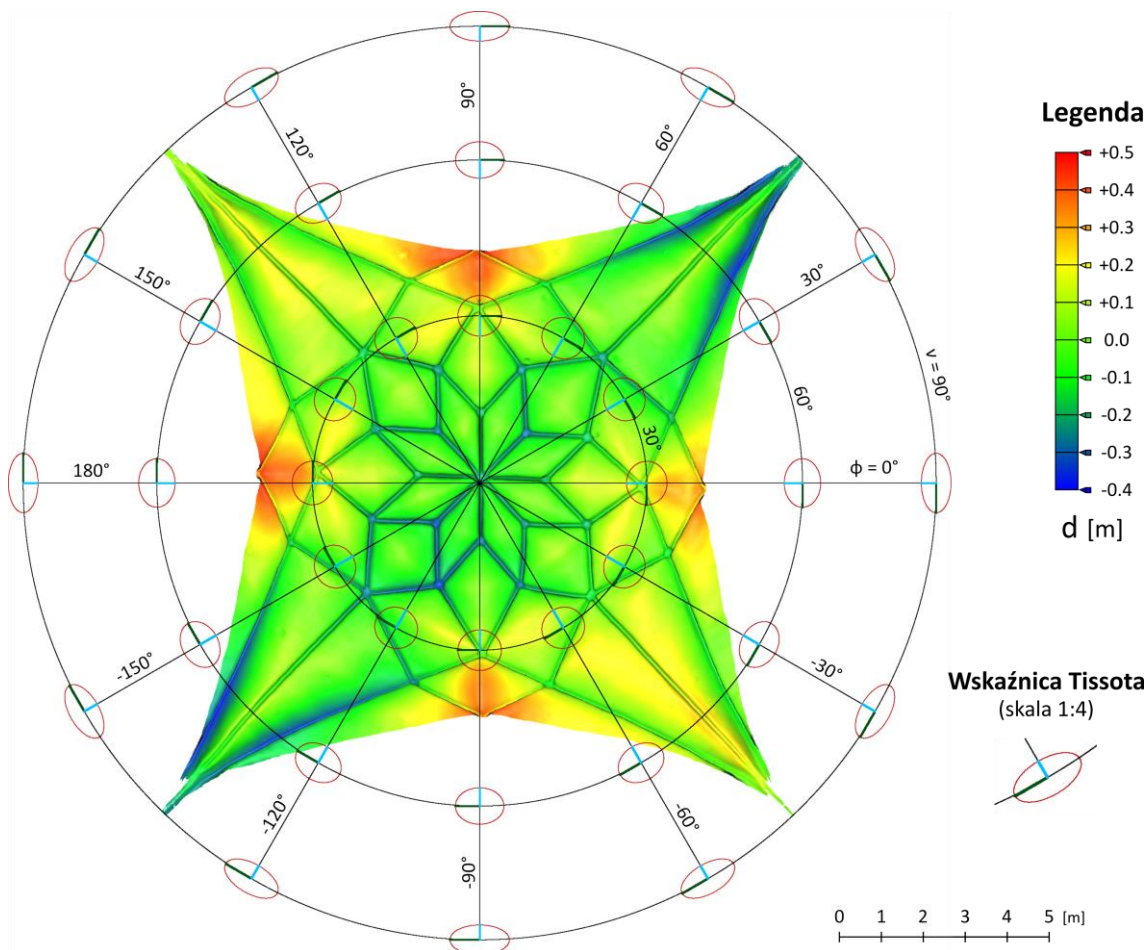
Rys. 6.22. Chmura punktów elipsoidalnego sklepienia (kolor zielony) oraz łuków i powierzchni łuków (kolor czerwony) przed (a) oraz po (b) przeprowadzeniu operacji przycięcia chmury oraz wpasowaniu elipsoidy obrotowej wydłużonej.

Pierwszym etapem procesu obliczeniowego była konwersja współrzędnych ortokartezjańskich punktów z chmury na współrzędne krzywoliniowe. Każdemu punktowi przyporządkowano współrzędne krzywoliniowe μ , ν , φ oraz wartość odchylenia względem powierzchni pierwotnej d (parametr głębokości). Współrzędna φ stanowi kąt w płaszczyźnie poziomej, a współrzędna ν odpowiednik kąta w płaszczyźnie pionowej. Współrzędna μ informuje o odległości punktu od odcinka łączącego oba ogniska elipsoidy. Zmieniając kolejność występowania poszczególnych współrzędnych utworzono alternatywną postać chmury punktów w postaci konfiguracji współrzędnych φ , ν , μ , d . Następnie stworzono przestrzenną interpretację utworzonego zbioru danych w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej (**Rys 6.23**). Ostatni element (odchylenie d) stanowi dodatkowy parametr liczbowy. W kierunku wschodnim przedstawiona została współrzędna φ przyjmująca wartości z zakresu kąta pełnego. Z racji wartości funkcji arcus tangens (4.28) występują w tym przypadku wartości z zakresu od -180° do $+180^\circ$. W kierunku północnym przedstawiono współrzędną ν , która przyjmuje wartości w zakresie kąta półpełnego począwszy od kierunku pionowego w dół. Na dole rysunku ($\nu = 0^\circ$) widoczny jest najwyższy punkt sklepienia. Położone wyżej fragmenty rysunku należy utożsamiać z przesuwaniem się w dół sklepienia w stronę filarów (**Rys. 65.21 c i 6.22 a**). Prostopadle względem płaszczyzny opracowania utworzonej przez współrzędne φ i ν odkładana jest trzecia współrzędna μ .



Rys. 6.23. Alternatywna forma prezentacji współrzędnych krzywoliniowych μ , ν , φ .

Podobnie jak w przypadku sklepień planetariów, struktura geometryczna pierwotnej chmury punktów obiektu wskazuje na użycie odwzorowania azymutalnego normalnego. Wynik przestrzennego rozwinięcia wraz z siatką parametryczną współrzędnych w odwzorowaniu azymutalnym równopolewym Lamberta oraz ze wskaźnicami Tissota obrazującymi rozkład zniekształceń w płaszczyźnie horyzontalnej przedstawiono na **Rys. 6.24**.

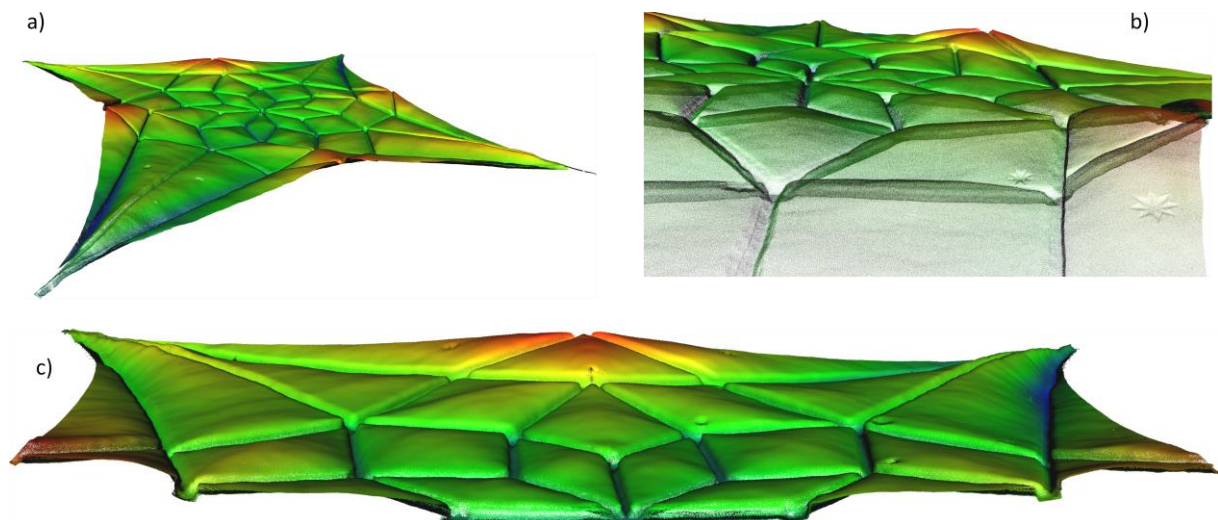


Rys. 6.24. Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów obiektu elipsoidalnego wydłużonego – widok z góry.

Siatka parametryczna odwzorowania wskazuje na niecentryczne położenie skrzyżowania centralnych ostrych krawędzi wysklepek sklepiennych. Na opracowaniu widoczne są zaburzenia

symetrii pomiędzy poszczególnymi stronami sklepienia (przykładowo zwieńczenia powierzchni przejściowych łuków na kierunkach $\varphi = 0^\circ$ i $\varphi = 180^\circ$). Powyższe wnioski dowodzą istnienia kolejnego potencjalnego obszaru zastosowania przestrzennych rozwinięć w postaci analiz przestrzennych skierowanych na badanie symetrii wewnętrznej obiektów. Adaptacja formuł odwzorowań kartograficznych pozwala nie tylko na przedstawienie w pojedynczym widoku całości obiektu eliptycznego, ale również umożliwia ocenę odległości na podstawie znanej skali liniowej opracowania oraz skal w kierunkach w kierunkach głównych występujących we wskaźnicach Tissota.

Rozwinięta chmura punktów jest opracowaniem trójwymiarowym, stąd umożliwia przedstawienie geometrii obiektu w rzutach perspektywicznych dopasowanych do potrzeb danego zagadnienia. Na **Rys. 6.25** zawarto przykłady ilustrujące rozdzielczość przestrzenną zbioru danych oraz przebieg przekroju przez rozwiniętą chmurę punktów. Szczegółowość chmury punktów pozwala na zobrazowanie, poza podstawową geometrią obiektu, również drobnych elementów architektonicznych oraz ozdobnych (przykładowo gwiazdy przytwierdzone do sklepienia na **Rys. 6.25 a**). Kolejnym przykładem zastosowania wyników skanowania laserowego jest możliwość ograniczenia zakresu wyświetlania chmury punktów do zadanego fragmentu przestrzeni trójwymiarowej i przedstawienie profili poprzecznych konstrukcji w zadanych kierunkach (np. **Rys. 6.25 c**).



Rys. 6.25. Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów obiektu eliptycznego wydłużonego – wybrane widoki perspektywiczne całego zbioru (a, b) oraz jego przekroju (c).

7 Podsumowanie

Przedmiotem niniejszej rozprawy doktorskiej jest numeryczne przetwarzanie chmur punktów pochodzących ze skanowania laserowego. Celem pracy było przedstawienie alternatywnej postaci chmury punktów w formie, która nie tracąc dotychczasowej szczegółowości, pozwoliłaby na czytelniejszą jej prezentację i ułatwiła wnioskowanie. Zaproponowane przekształcenie chmury punktów polega na zastosowaniu odpowiednich metod transformacji współrzędnych punktów. Rozważania zostały skupione na obiektach, których cechą jest występowanie geometrycznych elementów symetrii (linii bądź punktów). Wykorzystując fakt, iż obiekt przybiera kształt symetrycznej bryły, możliwe jest wprowadzenie dodatkowej parametryzacji punktów z chmury i wyrażenie ich położenia względem przyjętej matematycznej powierzchni podstawowej. Tym samym utworzony zostaje dodatkowy, poza ortokartezjańskim, układ współrzędnych, który jednoznacznie definiuje położenie punktów w przestrzeni trójwymiarowej. Istotnym aspektem zagadnienia jest uwzględnienie topologii pomiędzy założoną powierzchnią podstawową obiektu a poszczególnymi punktami. Wspomniana parametryzacja pozwala na wskazanie położenia wewnątrz lub na zewnątrz przyjętej powierzchni. Tym samym uzyskana zostaje nowa wielkość liniowa (parametr głębokości). Przyporządkowanie każdemu punktowi w chmurze dodatkowych parametrów (współrzędnych i głębokości), pozwala na utworzenie funkcyjnej zależności tworzącej nową strukturę przestrzenną zbioru. W przestrzennych rozwinięciach zaadaptowano wybrane odwzorowania kartograficzne, do których wprowadzono trzeci wymiar.

Mnogość form obiektów symetrycznych wymusza odrębne podejście do każdego przypadku. Za każdym razem konieczne jest przeprowadzenie czynności wstępnych warunkujących prawidłową realizację przestrzennego rozwinięcia. Czynnościami tymi są procedury estymacji powierzchni podstawowej właściwej dla danego obiektu oraz określenie ich elementów symetrii. Duże walory przydatności ma tutaj geodezyjny rachunek wyrównawczy, którego metody estymacji pozwalają na wyznaczenie w reprezentatywnym zbiorze punktów odpowiednich parametrów geometrycznych. W przypadku obiektów wysmukłych uzyskuje się zarówno wymaganą do przestrzennego rozwinięcia znajomość położenia osi rozwinięcia, jak również wartości wskazujące na wychylenie osi od kierunku pionowego. Wyznaczone kąty wychylenia osi znajdują zastosowanie w procesie tzw. pionizacji, polegającej na przeprowadzeniu odpowiedniej sekwencji elementarnych obrotów chmury punktów wokół osi układu współrzędnych. Realizacja obrotów elementarnych służy doprowadzeniu chmury punktów do warunku pionowości i decyduje o poprawności wykonania procedury odwzorowawczej. Przestrzenne rozwinięcia obiektów symetrycznych umożliwiają przedstawienie złożonej struktury pierwotnej chmury punktów w nowej postaci, która w znacznym stopniu redukuje niedogodności interpretacyjne i umożliwia przeprowadzanie dodatkowych analiz.

Warto zwrócić uwagę, że wraz z wprowadzeniem formuł odwzorowawczych, podobnie jak w klasycznej kartografii, w rozwiniętych chmurach punktów powstają zniekształcenia. Obiekty sferyczne i elipsoidalne z reguły cechują się dużym podobieństwem obiektu i jego komponentów funkcjonalnych do matematycznego kształtu podstawowego. W związku z powyższym, do określenia charakteru zniekształceń odwzorowawczych przyjęto wskaźnice Tissota, które w czytelny sposób przedstawiają rozkład zniekształceń horyzontalnych przestrzennego rozwinięcia chmury punktów. W pewnym przybliżeniu, biorąc pod uwagę niewielki stopień odbiegania punktów w chmurze od powierzchni pierwotnej (parametr głębokości), stanowią one aproksymację ogólnego, trójwymiarowego zniekształcenia rozwiniętej chmury punktów. Z kolei w przypadku przestrzennych rozwinięć symetrycznych obiektów walcowych stwierdzono brak zniekształceń liniowych

na powierzchni obrazowej (poboczniczy walca), rozciąganie chmury punktów w miarę zbliżania się do osi rozwinięcia oraz skurczenie chmury punktów w stronę przeciwną.

Rozprawa zawiera szereg zastosowań aplikacyjnych, w których zostały wykorzystane rzeczywiste dane pomiarowe powstałe w wyniku skanowania laserowego. Zastosowanie przestrzennych rozwinięć chmur punktów obiektów symetrycznych walcowych zostało przedstawione na przykładach wieży telekomunikacyjnej oraz kolejowej wieży ciśnień. Drugą grupą obiektów są obiekty symetryczne sferyczne w postaci sklepień planetariów dwóch wyższych uczelni morskich w Gdyni, tj. Uniwersytetu Morskiego oraz Akademii Marynarki Wojennej im. Bohaterów Westerplatte. Cechą wspólną obu planetariów jest jednakowa długość promieni sklepień. Ostatnim z zaprezentowanych w rozprawie przykładów jest przestrzenne rozwinięcie obiektu symetrycznego elipsoidalnego wydłużonego na przykładzie centralnego sklepienia Bazyliki Mariackiej w Gdańsku.

Nawiązując do głównych tez rozprawy doktorskiej wykazano sposoby wykorzystania odwzorowań kartograficznych w opracowanych przestrzennych rozwinięciach chmur punktów. W pracy przedstawiono zarówno proces pozyskania danych przestrzennych, jak również metody przetwarzania chmur punktów. Szczególny nacisk został położony na szczegółowe przedstawienie metody przestrzennych rozwinięć chmur punktów obiektów symetrycznych sferycznych, elipsoidalnych i walcowych. Stworzone formuły trójwymiarowych funkcji odwzorowawczych mają charakter uniwersalny i mogą być zastosowane również dla innych obiektów symetrycznych. Elementami nowatorskimi rozprawy nie opisanymi w literaturze tematu zdaniem autora są:

1. opracowana nowa metoda przestrzennych rozwinięć chmur punktów zwiększająca ich czytelność oraz zapewniająca możliwość pozyskiwania nowych informacji,
2. zastosowanie różnych odwzorowań kartograficznych dla wybranych obiektów symetrycznych,
3. zastosowanie geodezyjnego rachunku wyrównawczego, ze szczególnym uwzględnieniem funkcji odpornych.

Tym samym hipoteza główna pracy mówiąca o tym, że „możliwy jest wybór takiego odwzorowania oraz innego przekształcenia kartograficznego chmury punktów, aby poprzez właściwy jego dobór pozyskać dodatkową informację o cechach geometrycznych obiektu” została potwierdzona.

8 Wykaz rysunków i tabel

Nazwa rysunku	Strona
Rys. 2.1. Współrzędne punktu z chmury w lokalnym układzie współrzędnych skanera.	16
Rys. 2.2. Chmury punktów z trzech sąsiednich stanowisk w niezależnych lokalnych układach współrzędnych (a) oraz po przeprowadzeniu translacji i rotacji i utworzeniu wynikowej chmury punktów (b) przedstawione w tym samym widoku perspektywicznym.	19
Rys. 3.1. Elementarny czworobok krzywoliniowy.	23
Rys. 3.2. Elipsa zniekształceń (wskaźnica Tissota).	25
Rys. 3.3. Odwzorowanie azymutalne równopolowe Lamberta z biegunem północnym jako punktem centralnym.	28
Rys. 3.4. Wybrane wskaźnice Tissota w odwzorowaniu azymutalnym równopolowym Lamberta obszaru Morza Bałtyckiego.	29
Rys. 3.5. Odwzorowanie walcowe równopolowe Lamberta globu ziemskiego dla $\varphi_k = 0$.	30
Rys. 3.6. Wybrane wskaźnice Tissota w odwzorowaniu walcowym równopolowym Lamberta obszaru Morza Bałtyckiego.	30
Rys. 3.7. Odwzorowanie walcowe poprzeczne równokątne Lamberta.	32
Rys. 3.8. Wybrane wskaźnice Tissota w odwzorowaniu walcowym poprzecznym równokątnym Lamberta obszaru Morza Bałtyckiego.	33
Rys. 3.9. Odwzorowanie walcowe normalne równokątne Mercatora globu ziemskiego dla $\varphi_k = 0$.	34
Rys. 3.10. Wybrane wskaźnice Tissota w odwzorowaniu walcowym normalnym równokątnym Mercatora obszaru Morza Bałtyckiego.	34
Rys. 3.11. Odwzorowanie pseudowalcowe równopolowe Sansona.	35
Rys. 3.12. Wybrane wskaźnice Tissota w odwzorowaniu pseudowalcowym równopolowym Sansona obszaru Morza Bałtyckiego.	36
Rys. 3.13. Odwzorowanie walcowe poprzeczne równoodległościowe Cassiniego-Soldnera.	37
Rys. 3.14. Wybrane wskaźnice Tissota w odwzorowaniu walcowym poprzecznym równoodległościowym Cassiniego-Soldnera obszaru Morza Bałtyckiego.	38
Rys. 4.1. Przykłady modeli trójwymiarowych budynków o różnej szczegółowości.	42
Rys. 4.2. Cztery warianty umieszczenia w chmurze punktów latarni ulicznej powierzchni obrazu (poboczniczy walca) o promieniach wynoszących 0.25 m (a), 0.75 m (b), 1.50 m (c) i 2.15 m (d).	44
Rys. 4.3. Wyniki przestrzennego rozwinięcia chmury punktów na pobocznicy walca przy różnych długościach promienia podstawy.	45

Nazwa rysunku	Strona
Rys. 4.4. Przebieg osi konstrukcyjnej latarni ulicznej na kolejnych poziomach odniesienia w trzech rzutach ortogonalnych.	46
Rys. 4.5. Wyznaczenie przebiegu osi na podstawie horyzontalnych wycinków chmur punktów.	50
Rys. 4.6. Przebieg osi konstrukcyjnej latarni ulicznej na kolejnych poziomach odniesienia w trzech rzutach ortogonalnych.	51
Rys. 4.7. Wyznaczanie środka ciężkości na przykładzie wybranych trójkątów (a) oraz szczegółowe przedstawienie układu wektorów jednostkowych i symetrycznych w wierzchołkach (b).	52
Rys. 4.8. Pionizacja pochyłej osi rozwinięcia z wykorzystaniem elementarnych macierzy rotacji.	56
Rys. 4.9. Idea przestrzennego rozwinięcia chmury punktów na pobocznicy walca.	57
Rys. 4.10. Przestrzenne rozwinięcie niespionizowanej chmury punktów w rzucie izometrycznym (a) oraz rzutach ortogonalnych: z boku (b), z góry (c) i od frontu (d).	60
Rys. 4.11. Przestrzenne rozwinięcie spionizowanej chmury punktów w rzucie izometrycznym (a) oraz rzutach ortogonalnych: z boku (b), z góry (c) i od frontu (d).	61
Rys. 4.12. Pionizacja chmury punktów z zastosowaną dodatkową rotacją wokół osi OZ .	62
Rys. 4.13. Przestrzenne rozwinięcie spionizowanej chmury punktów z przeprowadzonym dodatkowym obrotem w rzucie izometrycznym (a) oraz rzutach ortogonalnych: z boku (b), z góry (c) i od frontu (d).	62
Rys. 4.14. Konfiguracja przestrzenna układu współrzędnych ortokartezjańskich x, y, z oraz współrzędnych krzywoliniowych ϑ, φ, r sfery.	65
Rys. 4.15. Konfiguracja przestrzenna układu współrzędnych ortokartezjańskich x, y, z oraz współrzędnych krzywoliniowych μ, ν, φ elipsoidy obrotowej wydłużonej.	66
Rys. 4.16. Zakresy wartości współrzędnych krzywoliniowych φ (a) i ν (b) przyjmowane dla stałej wartości współrzędnej $\mu = 1$	67
Rys. 4.17. Izolinie współrzędnych μ, ν odpowiadające dwóm przeciwstawnym wartościom współrzędnej φ położone w płaszczyźnie XZ trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.	67
Rys. 4.18. Odchylenia liniowe i krzywoliniowe wybranych punktów chmury (kolor żółty) względem przyjętej powierzchni pierwotnej (kolor niebieski).	75
Rys. 5.1. Funkcje wagowe metody najmniejszych kwadratów (a), metody Hubera (b) i metody duńskiej (c).	80
Rys. 5.2. Wartości diagonalnych współczynników macierzy wag wykorzystane w metodzie MNK i odpornej Hubera.	83
Rys. 5.3. Wyniki wpasowania okręgu w zbiór punktów przeprowadzone metodą MNK i odporną Hubera.	83

Nazwa rysunku	Strona
Rys. 5.4. Wyniki procesu pionizacji chmury punktów przeprowadzonej na podstawie wyników wyrównania metodą MNK (a) i odporną Hubera (b).	84
Rys. 5.5. Wyniki przestrzennego rozwinięcia chmur punktów spionizowanych w oparciu o wyniki wyrównania metodą MNK (a) i odporną Hubera (b).	85
Rys. 5.6. Idea czteroparametrowej reprezentacji prostej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej [Snow i Schaffrin, 2016].	87
Rys. 5.7. Wpasowanie prostej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej w losowy zbiór punktów w rzucie ortogonalnym z góry (a) oraz w rzucie perspektywicznym ukośnym (b).	90
Rys. 5.8. Wpasowanie prostej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej w środki przekrojów chmury punktów pochyłej latarni ulicznej w rzucie ortogonalnym z góry (a) oraz w rzucie perspektywicznym ukośnym (b).	91
Rys. 5.9. Chmura punktów pochyłej latarni (a) oraz chmury punktów spionizowane za pomocą metody wektorowej (b) i totalnej metody najmniejszych kwadratów (c).	92
Rys. 5.10. Przestrzenne rozwinięcie spionizowanych chmur punktów uzyskanych za pomocą metody wektorowej (a) i totalnej metody najmniejszych kwadratów (b).	92
Rys. 6.1. Chmura punktów wieży (a) i podestów z konstrukcjami podantenowymi i aparaturą (b, c, d).	94
Rys. 6.2. Horyzontalne przekroje chmury punktów podpory wieży z przykładem wyznaczeniem środka ciężkości trójkąta na jednym z poziomów.	94
Rys. 6.3. Przestrzenne rozwinięcie spionizowanej chmury punktów ramy z aparaturą w rzucie perspektywicznym.	95
Rys. 6.4. Przestrzenne rozwinięcie spionizowanej chmury punktów ramy z aparaturą telekomunikacyjną w rzutach ortogonalnych.	96
Rys. 6.5. Analiza ilościowa i topologiczna stopnia zajętości ramy z aparaturą w widoku z góry.	97
Rys. 6.6. Analiza ilościowa i topologiczna stopnia zajętości ramy z aparaturą w widokach z boku i z przodu.	99
Rys. 6.7. Skanowanie laserowe kolejowej wieży ciśnień w Gdańsku.	100
Rys. 6.8. Zarejestrowana chmura punktów przedstawiająca wieżę ciśnień oraz jej otoczenie w kolorystyce intensywności odbicia wiązki lasera.	101
Rys. 6.9. Chmura punktów wieży ciśnień z wyszczególnionymi przekrojami poprzecznymi (a) oraz geometria tych przekrojów w rzucie perspektywicznym (b) i ortogonalnym (c) z góry.	102
Rys. 6.10. Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów wieży ciśnień na pobocznicy walca w rzucie perspektywicznym ukośnym dowolnym.	103

Nazwa rysunku	Strona
Rys. 6.11. Fragment elewacji wieży ciśnień ukazany w jednym widoku przestrzennego rozwinięcia chmury punktów.	104
Rys. 6.12. Przestrzenne rozwinięcie pierwszej części rozwiniętej chmury punktów wieży ciśnień.	105
Rys. 6.13. Przestrzenne rozwinięcie drugiej części rozwiniętej chmury punktów wieży ciśnień.	105
Rys. 6.14. Przestrzenne rozwinięcie trzeciej części rozwiniętej chmury punktów wieży ciśnień.	106
Rys. 6.15. Przestrzenne rozwinięcie czwartej części rozwiniętej chmury punktów wieży ciśnień.	106
Rys. 6.16. Aparatura pomiarowa w planetarium AMW w Gdyni ze wskazaniem (czerwone strzałki) wybranych kul służących do późniejszej rejestracji chmur punktów.	107
Rys. 6.17. Fragmenty pomierzonych chmur punktów planetariów UMG (u góry) i AMW (na dole) z dodanym przebiegiem linii parametrycznych sfery aproksymującej kształt sklepień.	109
Rys. 6.18. Przestrzenne rozwinięcia chmur punktów sklepień planetariów UMG i AMW skonstruowane w oparciu o odwzorowanie azymutalne normalne równopolowe Lamberta.	111
Rys. 6.19. Przestrzenne rozwinięcie sklepień planetariów AMW (u góry) i UMG (na dole) zbudowane w oparciu o odwzorowania walcowe poprzeczne Gaussa-Krügera.	112
Rys. 6.20. Histogramy wartości odchyłeń pomierzonych punktów sklepień planetariów UMG (po lewej) i AMW (po prawej) od powierzchni pierwotnej (sfery).	113
Rys. 6.21. Chmura punktów przedstawiająca sklepienie budynku sakralnego wybrane do przestrzennego rozwinięcia w widokach: ortogonalnym pogładowym z góry (a), ortogonalnym szczegółowym z góry (b) oraz perspektywicznym ukośnym (c).	115
Rys. 6.22. Chmura punktów elipsoidalnego sklepienia (kolor zielony) oraz łuków i powierzchni łuków (kolor czerwony) przed (a) oraz po (b) przeprowadzeniu operacji przycięcia chmury oraz wpasowaniu elipsoidy obrotowej wydłużonej.	116
Rys. 6.23. Alternatywna forma prezentacji współrzędnych krzywoliniowych μ, ν, φ .	117
Rys. 6.24. Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów obiektu elipsoidalnego wydłużonego – widok z góry.	117
Rys. 6.25. Przestrzenne rozwinięcie chmury punktów obiektu elipsoidalnego wydłużonego – wybrane widoki perspektywiczne całego zbioru (a, b) oraz jego przekroju (c).	118

Nazwa tabeli	Strona
Tab. 2.1. Parametry wybranych skanerów laserowych obecnych na rynku w 2019 roku.	14
Tab. 5.1. Współrzędne horyzontalne punktów wygenerowanych punktów okręgu.	82
Tab. 5.2. Współrzędne środka oraz promień okręgu wyznaczone metodą MNK i odporną Hubera.	83
Tab. 5.3. Dane przestrzenne definiujące przebieg procesu pionizacji chmury punktów.	84
Tab. 5.4. Współrzędne środków wygenerowanych okręgów oraz punktów pochodzących z ich ortogonalnego rzutowania na prostą trójwymiarową.	90
Tab. 6.1. Procedura wyznaczenia wektora wypadkowego wyznaczającego oś konstrukcji.	98

9 Bibliografia

- [1] Abbas, M. A., Setan, H., Majid, Z., Chong, A. K., Idris, K. M., & Aspuri, A. (2013). Calibration and accuracy assessment of leica scanstation c10 terrestrial laser scanner. In *Developments in Multidimensional Spatial Data Models* (pp. 33-47). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [2] Abellán, A., Jaboyedoff, M., Oppikofer, T., & Vilaplana, J. M. (2009). Detection of millimetric deformation using a terrestrial laser scanner: experiment and application to a rockfall event. *Natural Hazards and Earth System Science*, 9(2), 365-372.
- [3] Ahn, S. J., Rauh, W., & Warnecke, H. J. (2001). Least-squares orthogonal distances fitting of circle, sphere, ellipse, hyperbola, and parabola. *Pattern Recognition*, 34(12), 2283-2303.
- [4] Ahokas, E., Yu, X., Oksanen, J., Hyyppä, J., Kaartinen, H., & Hyyppä, H. (2005). Optimization of the scanning angle for countrywide laser scanning. *Laser scanning*, 115-119.
- [5] Aita, D., Barsotti, R., Bennati, S., Caroti, G., & Piemonte, A. (2017). 3-dimensional geometric survey and structural modelling of the dome of Pisa cathedral. *The International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 42, 39.
- [6] Alda, J. (2003). Laser and Gaussian beam propagation and transformation. *Encyclopedia of optical engineering*, 2013, 999-1013.
- [7] Al-Durgham, M., Detchev, I., & Habib, A. (2011). *Analysis of two triangle-based multi-surface registration algorithms of irregular point clouds*. ISPRS-International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 3812, 61-66.
- [8] Alkan, R. M., & Karsidag, G. (2012, May). Analysis of the accuracy of terrestrial laser scanning measurements. In *FIG Working week* (pp. 6-12).
- [9] Andrews, J., & Séquin, C. H. (2014). Type-constrained direct fitting of quadric surfaces. *Computer-Aided Design and Applications*, 11(1), 107-119.
- [10] Anigacz, W. (2008). Geodezja inżynierska, Wybrane zagadnienia, Wyznaczenie odchylenia osi komina od pionu. Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole.
- [11] Arastounia, M. (2015). *Automated recognition of railroad infrastructure in rural areas from LiDAR data*. *Remote Sensing*, 7(11), 14916-14938.
- [12] Arfken, G. (1970). Coordinate systems. in *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd ed. Orlando, FL: Academic Press, pp. 103-107.
- [13] Arfken, G.B., Weber, H.J. & Harris, F.E. (2013). *Mathematical Methods for Physicists, A Comprehensive Guide*, Seventh Edition, Elsevier, Inc., Academic Press, Waltham, Oxford.
- [14] Ayoub, A. B. (2003). The eccentricity of a conic section. *The College Mathematics Journal*, 34(2), 116-121.
- [15] Bae, K. H., & Lichti, D. (2007). On-site self-calibration using planar features for terrestrial laser scanners. *Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spat. Inf. Sci.*, 36, 14-19.
- [16] Baltsavias, E. P. (1999). A comparison between photogrammetry and laser scanning. *ISPRS Journal of photogrammetry and Remote Sensing*, 54(2), 83-94.
- [17] Baran, W. (1999). Teoretyczne podstawy opracowania wyników pomiarów geodezyjnych. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.
- [18] Barnard, S. T. (1983). Interpreting perspective images. *Artificial intelligence*, 21(4), 435-462.
- [19] Barbarella, M., Fiani, M., & Lugli, A. (2013). Application of LiDAR-derived DEM for detection of mass movements on a landslide. *Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spat. Inf. Sci.*, 1, 89-98.

- [20] Bernat, M., Janowski, A., Rzepa, S., Sobieraj, A., & Szulwic, J. (2014). Studies on the use of terrestrial laser scanning in the maintenance of buildings belonging to the cultural heritage. *14th Geoconference on Informatics, Geoinformatics and Remote Sensing, SGEM. ORG, Albena, Bulgaria, 3*, 307-318.
- [21] Besl, P. J., & McKay, N. D. (1992, April). Method for registration of 3-D shapes. In *Sensor Fusion IV: Control Paradigms and Data Structures* (Vol. 1611, pp. 586-607). International Society for Optics and Photonics.
- [22] Biernacki, F. (1949). *Teoria odwzorowań powierzchni dla geodetów i kartografów*. Główny Urząd Pomiarów Kraju, Prace Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego Nr 4, Warszawa.
- [23] Biernacki, F. (1973). *Podstawy teorii odwzorowań kartograficznych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- [24] Boehler, W., Vicent, M. B., & Marbs, A. (2003). Investigating laser scanner accuracy. *The International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 34(Part 5), 696-701.
- [25] Borah, D. K., & Voelz, D. G. (2007). Estimation of laser beam pointing parameters in the presence of atmospheric turbulence. *Applied optics*, 46(23), 6010-6018.
- [26] Borrmann, D., Elseberg, J., Lingemann, K., & Nüchter, A. (2011). The 3d hough transform for plane detection in point clouds: A review and a new accumulator design. *3D Research*, 2(2), 3.
- [27] Brenner, C., Dold, C., & Ripperda, N. (2008). Coarse orientation of terrestrial laser scans in urban environments. *ISPRS journal of photogrammetry and remote sensing*, 63(1), 4-18.
- [28] Bronshtein, I.N., Semendyayev, K.A., Musiol, G., Mühlig, H. (2015). *Handbook of Mathematics*, Sixth Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [29] Bronsztejn, I. N., & Siemiendajew, K. A. (2003). *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*. Wyd. Dziewiętnaste. PWN, Warszawa.
- [30] Budiman, H., & Talib, J. (2010). Prolate spheroidal coordinate: an approximation to modeling Of ellipsoidal drops in rotating disc contractor column. *Journal of Science and Technology*, 3(1), 1-10.
- [31] Chen, Y., & Medioni, G. (1992). Object modelling by registration of multiple range images. *Image and vision computing*, 10(3), 145-155.
- [32] Cheng, L., Tong, L., Li, M., & Liu, Y. (2013). *Semi-automatic registration of airborne and terrestrial laser scanning data using building corner matching with boundaries as reliability check*. *Remote Sensing*, 5(12), 6260-6283.
- [33] Chernov, N., & Lesort, C. (2005). Least squares fitting of circles. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 23(3), 239-252 .
- [34] Churski, Z., Galon, R. (1996). *Siatki kartograficzne*, Wydanie IV, ZP UMK, Toruń.
- [35] Cignoni, P., Callieri, M., Corsini, M., Dellepiane, M., Ganovelli, F., & Ranzuglia, G. (2008, July). Meshlab: an open-source mesh processing tool. In *Eurographics Italian chapter conference* (Vol. 2008, pp. 129-136).
- [36] Clark, J., & Robson, S. (2004). Accuracy of measurements made with a Cyrax 2500 laser scanner against surfaces of known colour. *Survey Review*, 37(294), 626-638.
- [37] Coxeter, H. S. M. (1995). Some applications of trilinear coordinates. *Linear algebra and its applications*, 226, 375-388.
- [38] Czaplewski, K., & Wiśniewski, Z. (2008). Hybrid M-estimation in Maritime Navigation. *Polish Journal of Environmental Studies*, 17(5A), 25-32.

- [39] Czarnecki, K. (1994). *Geodezja współczesna w zarysie*. Wydawnictwo Wiedza i Życie.
- [40] Dabrowski, P. S., & Specht, C. (2019). Spatial expansion of the symmetrical objects point clouds to the lateral surface of the cylinder—Mathematical model. *Measurement*, 134, 40-47.
- [41] Deakin, R. E., Hunter, M. N., & Karney, C. F. F. (2010, September). The gauss-krüger projection. In Proceedings of the 23rd Victorian regional survey conference.
- [42] Decker, B. L. (1986). *World geodetic system 1984*. Defense Mapping Agency Aerospace Center St Louis Afs Mo.
- [43] Demantke, J., Mallet, C., David, N., & Vallet, B. (2011). Dimensionality based scale selection in 3D lidar point clouds. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 38(Part 5), W12.
- [44] Deniziuk, M., Kamiński, M., & Specht, C. (2014). Wykorzystanie oprogramowania SketchUp jako narzędzia do tworzenia modeli 3D obiektów na potrzeby symulatorów mostka nawigacyjnego. *Prace Wydziału Nawigacyjnego Akademii Morskiej w Gdyni*, (29), 46-54.
- [45] Dewez, T. J., Girardeau-Montaut, D., Allanic, C., & Rohmer, J. (2016). Facets: a cloudcompare plugin to extract geological planes from unstructured 3d point clouds. *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences*, 41.
- [46] Dos Santos, D. R., Dal Poz, A. P., & Khoshelham, K. (2013). *Indirect georeferencing of terrestrial laser scanning data using control lines*. *The photogrammetric record*, 28(143), 276-292.
- [47] Du, J. C., & Teng, H. C. (2007). 3D laser scanning and GPS technology for landslide earthwork volume estimation. *Automation in construction*, 16(5), 657-663.
- [48] Eberly, D. (2000). *Least squares fitting of data*. Chapel Hill, NC: Magic Software.
- [49] Eggert, D. W., Lorusso, A., & Fisher, R. B. (1997). Estimating 3-D rigid body transformations: a comparison of four major algorithms. *Machine vision and applications*, 9(5-6), 272-290.
- [50] Fan, L., Smethurst, J. A., Atkinson, P. M., & Powrie, W. (2015). Error in target-based georeferencing and registration in terrestrial laser scanning. *Computers & Geosciences*, 83, 54-64.
- [51] Fernandez, J. C., Singhanian, A., Caceres, J., Slatton, K. C., Starek, M., & Kumar, R. (2007). An overview of lidar point cloud processing software. *GEM Center Report No. Rep_2007-12-001, University of Florida*.
- [52] Flis, J. (1973). *Kartografia w zarysie*. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.
- [53] Fröhlich, C., & Mettenleiter, M. (2004). Terrestrial laser scanning—new perspectives in 3D surveying. *International archives of photogrammetry, remote sensing and spatial information sciences*, 36(Part 8), W2.
- [54] Gajderowicz, I. (2009). *Odwzorowania kartograficzne: podstawy*. Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, Olsztyn.
- [55] Galon, R. (1951). *Siatki kartograficzne Podręcznik praktyczny dla geografów*. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.
- [56] Gander, W., Golub, G. H., & Strebel, R. (1994). Least-squares fitting of circles and ellipses. *BIT Numerical Mathematics*, 34(4), 558-578.
- [57] Gaździcki J., (1975). *Informatyka w geodezji i kartografii*, PPWK, Warszawa, 1975.
- [58] Godin, G., Beraldin, J. A., Rioux, M., Levoy, M., & Cournoyer, L. (2001). An assessment of laser range measurement of marble surfaces.
- [59] Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2002). *Classical mechanics*. Third Edition, Addison-Wesley.
- [60] Grafared, E. W., & Krumm, F. W. (2006). *Map Projections, Cartographic Information Systems*.

- [61] Grafared, E. W., You, R. & Syffus, R. (2014). Map Projections, Cartographic Information Systems, Second Edition.
- [62] Grammalidis, N., & Strintzis, M. G. (2000, June). Head detection and tracking by 2-D and 3-D ellipsoid fitting. In *cgi* (p. 221). IEEE. Eberly, D. (2000). Least squares fitting of data. *Chapel Hill, NC: Magic Software*.
- [63] Gressin, A., Mallet, C., Demantké, J., & David, N. (2013). *Towards 3D lidar point cloud registration improvement using optimal neighborhood knowledge*. *ISPRS journal of photogrammetry and remote sensing*, 79, 240-251.
- [64] Gruen, A., & Akca, D. (2005). Least squares 3D surface and curve matching. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 59(3), 151-174.
- [65] Ge, Y., Yuan, Y., & Jia, N. (2013). More efficient methods among commonly used robust estimation methods for GPS coordinate transformation. *Survey Review*, 45(330), 229-234.
- [66] Gong, X., & Li, Z. (2017). A robust weighted total least-squares solution with Lagrange multipliers. *Survey review*, 49(354), 176-185.
- [67] Guarnieri, A., Vettore, A., El-Hakim, S., & Gonzo, L. (2004). Digital photogrammetry and laser scanning in cultural heritage survey. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 35, B5.
- [68] Guo, J., Ou, J., & Wang, H. (2010). Robust estimation for correlated observations: two local sensitivity-based downweighting strategies. *Journal of geodesy*, 84(4), 243-250.
- [69] Guo C., Peng J., Li C. (2017). Total least squares algorithms for fitting 3D straight lines, *IJAMML*, 6(1), 35-44.
- [70] Habib, A. F., Kersting, A. P., Ruifang, Z., Al-Durgham, M., Kim, C., & Lee, D. C. (2008). *LiDAR strip adjustment using conjugate linear features in overlapping strips*. *Proceedings of International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 385-390.
- [71] Hampel, F. R. (1974). The influence curve and its role in robust estimation. *Journal of the american statistical association*, 69(346), 383-393.
- [72] Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., & Stahel, W. A. (2011). *Robust statistics: the approach based on influence functions* (Vol. 196). John Wiley & Sons.
- [73] Hazewinkel M. (Ed.) (1990), *Inner product*, *Encyclopaedia of Mathematics: Volume 5: I – Lituus*, Kluwer Academic Publishers.
- [74] Hazewinkel M. (Ed.) (1992), *Sphere*, *Encyclopaedia of Mathematics: Volume 8: Rea – Sti*, Kluwer Academic Publishers.
- [75] Hazewinkel M. (Ed.) (1993), *Straight Line*, *Encyclopaedia of Mathematics: Volume 9: Sto – Zyg*, Kluwer Academic Publishers.
- [76] Hazewinkel M. (Ed.) (1995), *Ellipsoid*, *Encyclopaedia of Mathematics: Volume 2: Cop – Hau*, Kluwer Academic Publishers.
- [77] Heritage, G., & Large, A. (Eds.). (2009). *Laser scanning for the environmental sciences*. John Wiley & Sons.
- [78] Hu, F., & Zhao, Y. (2013). An improved method of discrete point cloud filtering based on complex environment. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics™*, 48(18), 514-522.
- [79] Hu, J., You, S., & Neumann, U. (2003). Approaches to large-scale urban modeling. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 23(6), 62-69.

- [80] Huang, T., Zhang, D., Li, G., & Jiang, M. (2012). *Registration method for terrestrial LiDAR point clouds using geometric features*. *Optical Engineering*, 51(2), 021114.
- [81] Huber, P. J. (1964). Robust Estimation of a Location Parameter. *Annals of Mathematical Statistics*, 35, 73-101.
- [82] Jagielski A., (2014). *Geodezja II*, wyd. 3 poprawione. Wydawnictwo Geodpis, Kraków.
- [83] Jekel, C. F. (2016). *Obtaining non-linear orthotropic material models for PVC-coated polyester via inverse bubble inflation*(Doctoral dissertation, Stellenbosch: Stellenbosch University).
- [84] Ji, Z., Song, M., Guan, H., & Yu, Y. (2015). *Accurate and robust registration of high-speed railway viaduct point clouds using closing conditions and external geometric constraints*. *ISPRS journal of photogrammetry and remote sensing*, 106, 55-67.
- [85] Junttila, S., Vastaranta, M., Liang, X., Kaartinen, H., Kukko, A., Kaasalainen, S., ... & Hyypä, J. (2017). Measuring leaf water content with dual-wavelength intensity data from terrestrial laser scanners. *Remote Sensing*, 9(1), 8.
- [86] Kaasalainen, S., Hyypä, J., Litkey, P., Hyypä, H., Ahokas, E., Kukko, A., & Kaartinen, H. (2007). Radiometric calibration of ALS intensity. *Int. Arch. Photogramm. Remote Sens*, 36, 201-205.
- [87] Kaasalainen, S., Krooks, A., Kukko, A., & Kaartinen, H. (2009). Radiometric calibration of terrestrial laser scanners with external reference targets. *Remote Sensing*, 1(3), 144-158.
- [88] Kadaj, R. (1988). Eine verallgemeinerte Klasse von Schätzverfahren mit praktischen Anwendungen. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 113(4), 157-166.
- [89] Kadaj, R. (2001). *Wytyczne techniczne G-1.10*. Główny Urząd Geodezji i Kartografii, Warszawa.
- [90] Kamiński, W., & Wiśniewski, Z. (1992). Analiza wybranych, odpornych na błędy grube, metod wyrównania obserwacji geodezyjnych. Cz. II Analiza. *Geodezja i Kartografia*, 41(3-4), 183-195.
- [91] Kimberling, C. (1993). Triangle centers as functions. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1269-1286.
- [92] Koláčny, A. (1969). Cartographic information—a fundamental concept and term in modern cartography. *The cartographic journal*, 6(1), 47-49.
- [93] König, R., Weise, K. H. (1951). *Mathematische Grundlagen der Höheren Geodäsie und Kartographie*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [94] Korn, G. A., & Korn, T. M. (2017). *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York.
- [95] Kosiński W., (2012). *Geodezja*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [96] Krarup, T., & Kubik, K. (1983). The danish method: experience and Philosophy. In *Deut. Geodact. Komm. Seminar on Math. Models of Geodetic Photogrammetric Point Determination with Regard to Outliers and Systematic Errors p 131-134(SEE N 84-26069 16-43)*.
- [97] Kryński J., Rogowski J.B. (2004). Systemy i układy odniesienia w geodezji, geodynamice i astronomii. W: Kryński J. (Red.), *Nowe obowiązujące niebieskie i ziemskie systemy i układy odniesienia oraz ich wzajemne relacje*. Instytut Geodezji i Kartografii, Warszawa.
- [98] Lach, R., Nawrocki, K., Zbyszewski, B., Lessaer, S., Lessaer, J., Sobieraj, L., & Jach, A. (2016, June). A Shift from 2D Design Paradigm of the 19 th Century to 3D/CityGML, BIM, 3D Printing and Some of Smarter Cities in Poland. In *REAL CORP 2016—SMART ME UP! How to become and how to stay a Smart City, and does this improve quality of life? Proceedings of 21st International Conference on Urban Planning, Regional Development and Information Society* (pp. 1015-1028). CORP—Competence Center of Urban and Regional Planning.

- [99] Lachat, E., Landes, T., & Grussenmeyer, P. (2017a). First experiences with the Trimble SX10 Scanning Total Station for building facade survey. *The International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 42, 405.
- [100] Lachat, E., Landes, T., & Grussenmeyer, P. (2017b). Investigation of a Combined Surveying and Scanning Device: The Trimble SX10 Scanning Total Station. *Sensors*, 17(4), 730.
- [101] Landau, H., Vollath, U., & Chen, X. (2009). Virtual reference station systems. *Positioning*, 1(02).
- [102] Lapaine, M., & Usery, E. L. (Eds.). (2017). *Choosing a map projection*. Cham: Springer.
- [103] Ledwoń, J. A., & Golczyk, M. (1967). *Chłodnie kominowe i wentylatorowe*. Arkady.
- [104] Lee, J., Son, H., Kim, C., & Kim, C. (2013). Skeleton-based 3D reconstruction of as-built pipelines from laser-scan data. *Automation in construction*, 35, 199-207.
- [105] Lee, J., Yu, K., Kim, Y., & Habib, A. F. (2007). *Adjustment of discrepancies between LIDAR data strips using linear features*. *IEEE Geoscience and remote sensing letters*, 4(3), 475-479.
- [106] Lemmens, M. (2011). Terrestrial laser scanning. In *Geo-information* (pp. 101-121). Springer Netherlands.
- [107] Lerma, J. L., Navarro, S., Cabrelles, M., & Villaverde, V. (2010). Terrestrial laser scanning and close range photogrammetry for 3D archaeological documentation: the Upper Palaeolithic Cave of Parpalló as a case study. *Journal of Archaeological Science*, 37(3), 499-507.
- [108] Lester, J. A. (1997). Triangles III: Complex triangle functions. *Aequationes Mathematicae*, 53(1-2), 4-35.
- [109] Levoy, M., Pulli, K., Curless, B., Rusinkiewicz, S., Koller, D., Pereira, L., ... & Shade, J. (2000, July). The digital Michelangelo project: 3D scanning of large statues. In *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (pp. 131-144). ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co .
- [110] Li, Q., & Griffiths, J. G. (2004, April). Least squares ellipsoid specific fitting. In *null* (p. 335). IEEE.
- [111] Lichti, D. D., & Licht, M. G. (2006). Experiences with terrestrial laser scanner modelling and accuracy assessment. *Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spat. Inf. Sci*, 36(5), 155-160.
- [112] Lichti, D. D., Chow, J., & Lahamy, H. (2011). Parameter de-correlation and model-identification in hybrid-style terrestrial laser scanner self-calibration. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 66(3), 317-326.
- [113] Lichti, D. D., Gordon, S. J., & Tipdecho, T. (2005). Error models and propagation in directly georeferenced terrestrial laser scanner networks. *Journal of surveying engineering*, 131(4), 135-142.
- [114] Lindstaedt, M., Kersten, T., Mechelke, K., & Graeger, T. (2012). Prüfverfahren für terrestrische Laserscanner—Ge-meinsame geometrische Genauigkeitsuntersuchungen verschiedener Laserscanner an der HCU Hamburg. *Photogrammetrie, Laserscanning, Optische 3D-Messtechnik: Beiträge der Oldenburger 3D-Tage*, 264-275.
- [115] Łomnicki A. (1927). *Kartografja matematyczna*. Książnica - Atlas, Zjednoczone Zakłady Kartograficzne i Wydawnicze, Tow. Naucz. Szkół Średn. i Wyż. - Sp. Akc., Lwów - Warszawa.
- [116] Lubowiecka, I., Arias, P., Riveiro, B., & Solla, M. (2011). Multidisciplinary approach to the assessment of historic structures based on the case of a masonry bridge in Galicia (Spain). *Computers & Structures*, 89(17-18), 1615-1627.
- [117] Lukács, G., Martin, R., & Marshall, D. (1998, June). Faithful least-squares fitting of spheres, cylinders, cones and tori for reliable segmentation. In *European conference on computer vision* (pp. 671-686). Springer, Berlin, Heidelberg.

- [118] Łyszkowicz A., (2006). Geodezja czyli sztuka mierzenia Ziemi. *Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego*, Olsztyn.
- [119] McQuarrie, D. A. (2003). *Mathematical methods for scientists and engineers*. University Science Books, p. 388.
- [120] Mechelke, K., Kersten, T. P., & Lindstaedt, M. (2007). Comparative investigations into the accuracy behaviour of the new generation of terrestrial laser scanning systems. *Proc. in the*
- [121] Medyńska-Gulij, B. (2012). *Kartografia i geowizualizacja*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [122] Medyńska-Gulij, B. (2017). *Kartografia: zasady i zastosowania geowizualizacji*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [123] Misra, P., & Enge, P. (2006). *Global Positioning System: signals, measurements and performance second edition*. Massachusetts: Ganga-Jamuna Press.
- [124] Moritz, H. (1980). Geodetic reference system 1980. *Journal of Geodesy*, 54(3), 395-405.
- [125] Okada, K., Kagami, S., Inaba, M., & Inoue, H. (2001). Plane segment finder: algorithm, implementation and applications. In *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on* (Vol. 2, pp. 2120-2125). IEEE.
- [126] Okatani, I. S., & Deguchi, K. (2002). A method for fine registration of multiple view range images considering the measurement error properties. *Computer Vision and Image Understanding*, 87(1-3), 66-77.
- [127] Osowski, F., Brokman, L. (1970). *Elementy kartografii*. Państwowe Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych, Warszawa.
- [128] Pâquet, R. (2003). A method to predict accuracy of matching in least squares surface matching. *3-D reconstruction from airborne laserscanner and InSar data*, 34, 8-13.
- [129] Pędzich, P. (2014). *Podstawy odwzorowań kartograficznych z aplikacjami komputerowymi*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- [130] Pesci, A., Teza, G., Bonali, E., Casula, G., & Boschi, E. (2013). A laser scanning-based method for fast estimation of seismic-induced building deformations. *ISPRS journal of photogrammetry and remote sensing*, 79, 185-198.
- [131] Petrie, G., & Toth, C. K. (2009). *Terrestrial laser scanners. Topographic Laser Ranging and Scanning Principles and Processing*, 87-128.
- [132] Pfeifer, N., & Briese, C. (2007, April). Laser scanning—principles and applications. In *GeoSiberia 2007-International Exhibition and Scientific Congress*.
- [133] Pfeifer, N., Dorninger, P., Haring, A., & Fan, H. (2007). *Investigating terrestrial laser scanning intensity data: quality and functional relations* (pp. 328-337).
- [134] PKP, 2016. Uchwała Nr 8 Zarządu PKP S.A. z dnia 12 stycznia 2016 r. w sprawie przyjęcia standardu technicznego "O organizacji i wykonywaniu pomiarów w geodezji kolejowej" GK-1.
- [135] Pritchard, D., Sperner, J., Hoepner, S., & Tenschert, R. (2017). Terrestrial laser scanning for heritage conservation: the Cologne Cathedral documentation project. *ISPRS Annals of Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences*, 4.
- [136] Proakis, J. G., Salehi, M. (2002). *Communication systems engineering*. 2nd edition. New Jersey: Prentice Hall.
- [137] Prószyński, W. (2013). An approach to response-based reliability analysis of quasi-linear Errors-in-Variables models. *Journal of Geodesy*, 87(1), 89-99.

- [138] Pu, S., & Vosselman, G. (2007). Extracting windows from terrestrial laser scanning. *Intl Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 36, 12-14.
- [139] Rabbani, T., Dijkman, S., van den Heuvel, F., & Vosselman, G. (2007). An integrated approach for modelling and global registration of point clouds. *ISPRS journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 61(6), 355-370.
- [140] Ratajczak M., Wężyk P., 2015, Automatic determination of trunk diameter, crown base and height of scots pine (*Pinus Sylvestris* L.) Based on analysis of 3D point clouds gathered from multi-station terrestrial laser scanning, *Archiwum Fotogrametrii, Kartografii i Teledetekcji*, Vol. 27.
- [141] Rees, W. G., & Pellika, P. (2001). Principles of remote sensing. *Cambridge University press*.
- [142] Remondino, F. (2003). From point cloud to surface: the modeling and visualization problem. *International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 34.
- [143] Reshetyuk, Y. (2009). *Terrestrial laser scanning: Error sources, self-calibration and direct georeferencing*. VDM Verlag Dr. Muller.
- [144] Reshetyuk, Y. (2010). Direct georeferencing with GPS in terrestrial laser scanning. *Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, 135(3), 151-159.
- [145] Riveiro, B., González-Jorge, H., Varela, M., & Jáuregui, D. V. (2013). Validation of terrestrial laser scanning and photogrammetry techniques for the measurement of vertical underclearance and beam geometry in structural inspection of bridges. *Measurement*, 46(1), 784-794.
- [146] Roberts, K. S. (1988, June). A new representation for a line. In *Proceedings CVPR'88: The Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (pp. 635-640). IEEE.
- [147] Robinson, A. H., Sale, R. D., Morrison, J. L., & Ostrowski, W. (1988). *Podstawy kartografii*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- [148] Rousseeuw, P. J., & Ronchetti, E. (1981). Influence curves of general statistics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 7(3), 161-166.
- [149] Rozporządzenie, 2011a. Rozporządzenie Ministra Spraw Wewnętrznych i Administracji z dnia 9 listopada 2011 r. w sprawie standardów technicznych wykonywania geodezyjnych pomiarów sytuacyjnych i wysokościowych oraz opracowywania i przekazywania wyników tych pomiarów do państwowego zasobu geodezyjnego i kartograficznego (Dz.U. 2011 nr 263 poz. 1572).
- [150] Rozporządzenie, 2011b. Rozporządzenie Ministra Spraw Wewnętrznych i Administracji z dnia 17 listopada 2011 r. w sprawie bazy danych obiektów topograficznych oraz bazy danych obiektów ogólnogeograficznych, a także standardowych opracowań kartograficznych (Dz.U. 2011 nr 279 poz. 1642).
- [151] Rozporządzenie, 2012, Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 15 października 2012 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych (Dz.U. 2012 poz. 1247).
- [152] Rozporządzenie, 2015. Ministra Administracji i Cyfryzacji z dnia 2 listopada 2015 r. w sprawie bazy danych obiektów topograficznych oraz mapy zasadniczej (Dz.U. 2015 poz. 2028)
- [153] Różycki, J. (1950). *Krótki zarys teorii odwzorowań kartograficznych, Część I*. Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa.
- [154] Różycki, J. (1953). *Krótki zarys teorii odwzorowań kartograficznych, Część II*. Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa.

- [155] Różycki, J. (1978). *Kartografia matematyczna*. Wyd. drugie. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- [156] Rusinkiewicz, S., & Levoy, M. (2001). Efficient variants of the ICP algorithm. In *3-D Digital Imaging and Modeling, 2001. Proceedings. Third International Conference on* (pp. 145-152). IEEE.
- [157] Rusu, R. B., & Cousins, S. (2011, May). 3d is here: Point cloud library (pcl). In *Robotics and automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on* (pp. 1-4). IEEE.
- [158] Rutzinger, M., Pratihast, A. K., Oude Elberink, S., & Vosselman, G. (2010). Detection and modelling of 3D trees from mobile laser scanning data. *Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spat. Inf. Sci*, 38, 520-525.
- [159] Salo, P., Jokinen, O., & Kukko, A. (2008). On the calibration of the distance measuring component of a terrestrial laser scanner. In *Proc. in the XXIIth ISPRS Congress, Silk Road for Information from Imagery* (Vol. 37, p. B5).
- [160] Santala, J. A. A. K. O., & Joala, V. A. H. U. R. (2003). On the calibration of a ground-based laser scanner. *TS12*, 4.
- [161] Santolaria, J., Guillomía, D., Cajal, C., Albajez, J., & Aguilar, J. (2009). Modelling and calibration technique of laser triangulation sensors for integration in robot arms and articulated arm coordinate measuring machines. *Sensors*, 9(9), 7374-7396.
- [162] Sawicki, K. (1960). Pięć wieków geodezji polskiej. *Państwowe Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych*, Warszawa.
- [163] Scherer, M., & Lerma, J. L. (2009). From the conventional total station to the prospective image assisted photogrammetric scanning total station: Comprehensive review. *Journal of Surveying Engineering*, 135(4), 173-178.
- [164] Schnabel, R., Wahl, R., & Klein, R. (2007, June). Efficient RANSAC for point-cloud shape detection. In *Computer graphics forum* (Vol. 26, No. 2, pp. 214-226). Oxford, UK: Blackwell Publishing Ltd.
- [165] Schwalbe, E., Maas, H. G., Dietrich, R., & Ewert, H. (2008). Glacier velocity determination from multi temporal terrestrial long range laser scanner point clouds. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 37, 457-462.
- [166] Scopigno, R., Callieri, M., Cignoni, P., Corsini, M., Dellepiane, M., Ponchio, F., & Ranzuglia, G. (2011). 3D models for cultural heritage: beyond plain visualization. *Computer*, (7), 48-55.
- [167] Serafin, J., & Grisetti, G. (2015, September). NICP: Dense normal based point cloud registration. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2015 IEEE/RSJ International Conference on* (pp. 742-749). IEEE.
- [168] Serna, A., Marcotegui, B., Goulette, F., & Deschaud, J. E. (2014, March). Paris-rue-Madame database: a 3D mobile laser scanner dataset for benchmarking urban detection, segmentation and classification methods. In *4th International Conference on Pattern Recognition, Applications and Methods ICPRAM 2014*.
- [169] Shakarji, C. M. (1998). Least-squares fitting algorithms of the NIST algorithm testing system. *Journal of research of the National Institute of Standards and Technology*, 103(6), 633.
- [170] Skowronski, N. S., Clark, K. L., Gallagher, M., Birdsey, R. A., & Hom, J. L. (2014). Airborne laser scanner-assisted estimation of aboveground biomass change in a temperate oak-pine forest. *Remote Sensing of Environment*, 151, 166-174.
- [171] Snow, K., & Schaffrin, B. (2016). Line fitting in Euclidean 3D space. *Studia geophysica et geodaetica*, 60(2), 210-227.

- [172] Snyder, J. P. (1987). *Map projections--A working manual* (Vol. 1395). US Government Printing Office.
- [173] Snyder, J. P., & Voxland, P. M. (1989). *An album of map projections* (No. 1453). US Government Printing Office.
- [174] Soudarissanane, S. S. (2016). The geometry of terrestrial laser scanning; identification of errors, modeling and mitigation of scanning geometry.
- [175] Soudarissanane, S., Lindenbergh, R., Menenti, M., & Teunissen, P. (2011). Scanning geometry: Influencing factor on the quality of terrestrial laser scanning points. *ISPRS journal of photogrammetry and remote sensing*, 66(4), 389-399.
- [176] Söderström, T. (2007). Errors-in-variables methods in system identification. *Automatica*, 43(6), 939-958.
- [177] Specht, C., Dąbrowski, P., Dumalski, A., & Hejbudzka, K. (2016). Modeling 3D Objects for Navigation Purposes Using Laser Scanning. *TransNav: International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*, 10.
- [178] Specht, C., Mania, M., Skóra, M., & Specht, M. (2015). Accuracy of the GPS Positioning System in the Context of Increasing the Number of Satellites in the Constellation. *Polish Maritime Research*, 22(2), 9-14.
- [179] Specht, C., Specht, M., & Dąbrowski, P. (2017). Comparative Analysis of Active Geodetic Networks in Poland. *International Multidisciplinary Scientific GeoConference: SGEM: Surveying Geology & mining Ecology Management*, 17, 163-176.
- [180] Staiger, R. (2011). 10 years of terrestrial Laser Scanning technology, systems and applications. *Интерэкспо Гео-Сибирь, (Пленарное заседание)*.
- [181] Stein, D. (2018). *Mobile laser scanning based determination of railway network topology and branching direction on turnouts*(Vol. 38). KIT Scientific Publishing.
- [182] Szaflarski, J. (1965). *Zarys kartografii*. Państwowe Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych, Warszawa.
- [183] Szpunar, W. (1982). *Podstawy geodezji wyższej*. PPWK, Warszawa.
- [184] Tabaka, P., & Fryc, I. (2015). Zależność poziomu zanieczyszczenia otoczenia światłem od kształtu krzywej światłości użytkowanej oprawy oświetleniowej. *Kosmos*, 4(64), 669-677.
- [185] Tang, P., Huber, D., Akinci, B., Lipman, R., & Lytle, A. (2010). Automatic reconstruction of as-built building information models from laser-scanned point clouds: A review of related techniques. *Automation in construction*, 19(7), 829-843.
- [186] Tóvári, D., & Pfeifer, N. (2005). Segmentation based robust interpolation-a new approach to laser data filtering. *International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 36(3/19), 79-84.
- [187] Urbański, J., Czapczyk, M. (1992). *Podstawy kartografii i geodezji nawigacyjnej*. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Morskiej w Gdyni, Gdynia.
- [188] Ustawa, 1989. Ustawa z dnia 17 maja 1989 r. Prawo geodezyjne i kartograficzne (Dz.U. 1989 nr 30 poz. 163 z późn. zmianami).
- [189] Ustawa, 2010. Ustawa z dnia 4 marca 2010 r. o infrastrukturze informacji przestrzennej (Dz.U. 2010 nr 76 poz. 489)
- [190] Van Huffel, S., & Lemmerling, P. (Eds.). (2013). *Total least squares and errors-in-variables modeling: analysis, algorithms and applications*. Springer Science & Business Media.

- [191] Varela-González, M., González-Jorge, H., Riveiro, B., & Arias, P. (2013). Performance testing of LiDAR exploitation software. *Computers & geosciences*, 54, 122-129.
- [192] Vosselman, G., & Maas, H. G. (2010). Airborne and terrestrial laser scanning. CRC Press.
- [193] Wanic A., (2007). Instrumentoznawstwo geodezyjne i elementy technik pomiarowych, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie, Olsztyn.
- [194] Wezyk, P., Koziol, K., Glista, M., & Pierzchalski, M. (2007, September). Terrestrial laser scanning versus traditional forest inventory: First results from the Polish forests. In *ISPRS workshop on laser scanning* (pp. 12-14).
- [195] Wilgat, T. (1959). Podstawy kartografii. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.
- [196] Wisniewski, Z. (1999). A concept of robust estimation of variance coefficient (VR-estimation). *Bollettino di geodesia e scienze affini*, 58(3), 291-310.
- [197] Wiśniewski, Z. (2009). Rachunek wyrównawczy w geodezji z przykładami. *Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego*, Olsztyn.
- [198] Wiśniewski Z. (2013). Zaawansowane metody opracowania obserwacji geodezyjnych z przykładami. *Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego*, Olsztyn.
- [199] Wiśniewski, Z. (2014). M-estimation with probabilistic models of geodetic observations. *Journal of Geodesy*, 88(10), 941-957.
- [200] Wiśniewski, Z. (2017). MP estimation applied to platykurtic sets of geodetic observations. *Geodesy and Cartography*, 66(1), 117-135.
- [201] Yang, Y., Song, L., & Xu, T. (2002). Robust estimator for correlated observations based on bifactor equivalent weights. *Journal of geodesy*, 76(6-7), 353-358.
- [202] Ząbek, J., (2012). Geodezja I. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2012.
- [203] Zakatow, P. (1959). Geodezja wyższa. PPWK, Warszawa.
- [204] Zhang, D., Huang, T., Li, G., & Jiang, M. (2011). Robust algorithm for registration of building point clouds using planar patches. *Journal of Surveying Engineering*, 138(1), 31-36.
- [205] Zhu, L., & Hyyppä, J. (2014). The use of airborne and mobile laser scanning for modeling railway environments in 3D. *Remote Sensing*, 6(4), 3075-3100.
- [206] Zienkiewicz, M. H., & Czaplewski, K. (2017). Analysis of a practical application of geodetic methods of robust estimation in a vessel positioning based on radar observations. In *Environmental Engineering. Proceedings of the International Conference on Environmental Engineering. ICEE* (Vol. 10, pp. 1-7). Vilnius Gediminas Technical University, Department of Construction Economics & Property.
- [207] Zienkiewicz, M. H. (2019). Deformation Analysis of Geodetic Networks by Applying Msplit Estimation with Conditions Binding the Competitive Parameters. *Journal of Surveying Engineering*, 145(2), 04019001.
- [208] Żyszkowska, W., Spallek, W. A., & Borowicz, D. (2012). *Kartografia tematyczna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.